Zur Theorie der Cremona'schen Transformationen, insbesondere derjenigen 4. Ordnung.

Inaugural-Dissertation

welche mit Genehmigung

der

Philosophischen Facultät der Königl. Universität Breslau

zur

Erlangung der Doctorwürde

Montag, den 20. März 1882, Mittags 11 Uhr

in der

kleinen Aula

öffentlich verteidigen wird

Adolf Schmidt

gegen die Herren Opponenten

J. Aust, Stud. phil.

O. Gutsche, Cand. math.

P. Schuster, Stud. math.

Breslau.

Druck von Grass, Barth und Comp. (W. Friedrich.)

Herrn Professor Dr. Rosanes

in Hochachtung und Dankbarkeit gewidmet

vom

Verfasser.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543119_0016

Historische Einleitung.

Die von Cremona entdeckte und nach ihm benannte birationale Beziehung der Punkte zweier Ebenen auf einander ist bisher nur in ihren Hauptzügen untersucht worden. Die meisten bekannten Eigenschaften betreffen einerseits die Beziehungen zwischen den Ordnungszahlen und Singularitäten entsprechender Curven, andererseits die Relationen zwischen den Zahlen, welche die Systeme der in beiden Ebenen auftretenden Fundamentalpunkte (d. h. derjenigen Punkte, in denen die Eindeutigkeit der Beziehung eine Ausnahme erleidet) charakterisieren. Die hierauf bezüglichen Theoreme finden sich zum grössten Teil schon in den beiden Abhandlungen Cremonas.[1]) Einige Jahre nach diesen erschien eine Arbeit Cayleys,[2]) welche jedoch, abgesehen von der Aufstellung einer analogen Theorie für den Raum, im wesentlichen nur eine Zusammenstellung der Cremona'schen Resultate enthält. Neu ist darin der von Clifford durch Induction gefundene Satz, dass jede Cremona'sche Transformation durch eine Folge von solchen der 2. Ordnung ersetzt werden kann. Fast gleichzeitig wurde derselbe Satz von Nöther[3]) veröffentlicht und bald darauf auch bewiesen. Einen andern Beweis gab zu derselben Zeit Herr

---

[1]) Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. Memorie dell'Accademia di Bologna. Serie II, t. II (1863), t. V (1865).

[2]) On the rational transformation between two spaces. Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. III (1869).

[3]) Göttinger Nachrichten (1870 Januar). — Ueber Flächen, welche Scharen rationaler Curven enthalten. Math. Ann. III (1870). (Vergl. die Note Math. Ann. V.)

Professor Rosanes[4]) in einer Abhandlung, welche ausserdem den wichtigen neuen Satz enthielt, dass jede eindeutig umkehrbare rationale Beziehung zweier Ebenen eine Cremona'sche Verwandtschaft sein müsse. Eine systematische Zusammenstellung aller dieser Resultate, unter denen noch ein die Fundamentalpunktsysteme betreffender, von Cremona aufgestellter, von Clebsch[5]) zuerst streng bewiesener Satz (vgl. S. 19) hervorzuheben ist, enthalten die „Vorlesungen über Geometrie" von A. Clebsch (Herausg. v. Lindemann); die Hauptpunkte der Theorie findet man auch in Salmons „Higher plane curves".

Ein anderes Feld der Untersuchung eröffnet die Aufgabe der Bestimmung einer Transformation, welche gegebenen Bedingungen genügt. Diese Aufgabe ist bisher nur in den Fällen der quadratischen und der kubischen Verwandtschaft behandelt worden. Die erstere ist bekanntlich, sowohl in ihrer allgemeinen Gestalt, wie in der Specialform der Transformation durch reciproke Radienvectoren, schon lange Zeit vor der Aufstellung der allgemeinen Theorie Cremonas eingehend untersucht und vielfach angewendet worden. (Ausführliche Litteraturnachweise findet man in Salmon-Fiedler „Kegelschnitte", 4. Aufl., S. 697 und 698.) Insbesondere das Problem ihrer Bestimmbarkeit hat in den Arbeiten von Reye[6]) und Weyr[7]) sowie in der sogleich zu erwähnenden von Maschke eine ausführliche Erörterung erfahren, allerdings mit der Beschränkung auf die einfachsten Daten (Fundamentalpunkte und Geraden, entsprechende Punktepaare). In neuester Zeit ist auch die Transformation der 3. Ordnung in dieser Richtung einer genauen und sehr vollständigen Untersuchung unterzogen worden.[8])

---

[4]) Ueber diejenigen rationalen Substitutionen, welche eine rationale Umkehrung zulassen. Journal f. r. u. ang. Math. Bd. 73 (1870).

[5]) Zur Theorie der Cremona'schen Transformationen. Mathematische Annalen IV, (1871).

[6]) Schlömilchs Zeitschrift, Band 11. Geometrische Verwandtschaft 2. Grades.

[7]) Schlömilchs Zeitschrift, Bd. 14. Analytische Untersuchung der quadr. Verwandtschaft.

[8]) Ueber das Problem der Bestimmbarkeit der Cremona'schen Transformation 3. Ordnung. In.-Diss. von Th. Maschke. Breslau (1879).

Die vorliegende, durch eine Preisaufgabe der philosophischen Fakultät hiesiger Universität veranlasste Arbeit stellt sich das Ziel, geleitet von den bisher gewonnenen speciellen Resultaten, einige allgemeine, auf die Cremona'schen Transformationen beliebiger Ordnung bezügliche Sätze zu entwickeln. Hieran soll sich eine Untersuchung der Cremona'schen Verwandtschaft 4. Ordnung, welche in jeder Ebene drei doppelte und drei einfache Fundamentalpunkte besitzt, schliessen. Diese Untersuchung, welche in der genannten Preisaufgabe in erster Linie gefordert war, wird mannigfache Beispiele für die Anwendung der vorangeschickten allgemeinen Betrachtung liefern.

Ueber die Bestimmbarkeit Cremona'scher Transformationen beliebiger Ordnung.

§ 1.

Eine Cremona'sche Transformation der n^{ten} Ordnung entsteht durch Herstellung einer projectivischen Beziehung zwischen zwei doppelt-unendlichen Mannigfaltigkeiten: dem System sämtlicher Geraden einer Ebene und einem in einer zweiten Ebene gelegenen Curvennetz n^{ter} Ordnung, dessen Curven gemeinsame Punkte, die als n^2-1 Schnittpunkte zählen, besitzen. Alle Curven des Netzes, die ausser diesen festen noch einen willkürlich gewählten, gemeinsamen Punkt haben, bilden ein Büschel; da dasselbe von ihren entsprechenden Strahlen gilt, so gehen diese gleichfalls durch einen Punkt. Wird dieser dem variablen Basispunkt des Curvenbüschels zugeordnet, so erhält man die als Cremona'sche Verwandtschaft bezeichnete Beziehung der Punkte beider Ebenen. Durch dieselbe wird gleichzeitig den sämtlichen Geraden der zweiten Ebene ein ähnlich specialisiertes Netz von Curven n^{ter} Ordnung in der ersten projectivisch zugeordnet.

Kennt man die Basispunkte des in der einen Ebene gelegenen Netzes, die sogenannten Haupt- oder Fundamentalpunkte (nach Cremona; Hauptsystem nach Cayley) der Trans-

formation, so ist das Netz selbst bestimmt, und um seine projectivische Beziehung auf die Geraden der andern Ebene festzulegen, braucht man nur irgend vier Curven ebenso vielen beliebig gewählten Geraden zuzuordnen. Da eine Aenderung der letzteren nur eine collineare Transformation bewirkt, die durch Festlegung von vier Punkten bestimmt ist, so wird die Cremona'sche Verwandtschaft auch durch das Hauptsystem einer Ebene und vier entsprechende Punktepaare eindeutig definiert. Infolge dieses bekannten Satzes kann das Problem der Bestimmbarkeit einer Cremona'schen Transformation folgendermassen ausgesprochen werden:

Welche Daten sind zur Bestimmung der Hauptpunkte einer Ebene und derjenigen Punkte, welche vier willkürlich gewählten entsprechen, erforderlich?

Da ein Punkt durch zwei Angaben festgelegt ist, so hängt die Transformation von $2\,(m + 4)$ Grössen ab, wenn m die in beiden Ebenen gleiche Anzahl der Fundamentalpunkte bezeichnet. Diese Grössen sind von einander unabhängig, da zwischen den Hauptpunkten einer Ebene keine Beziehung besteht. Es sind daher, wenn man sie als Unbekannte einführt, zu ihrer Bestimmung $2\,(m + 4)$ unabhängige Gleichungen nötig. Bezeichnet man also als ein einfaches Datum jede Angabe, welche eine Gleichung zwischen diesen Grössen liefert, und setzt man jede andere so vielen einfachen Daten äquivalent, als derartige Gleichungen aus ihrer Kenntnis fliessen, so ergiebt sich unmittelbar der Satz:

(1.) *Zur Festlegung einer Cremona'schen Transformation, welche in jeder Ebene m Fundamentalpunkte besitzt, sind $2\,(m + 4)$ einfache unter einander unabhängige Data erforderlich.*

(Die Bemerkung, dass die Anzahl der zur Bestimmung nötigen Angaben nur von derjenigen der Fundamentalpunkte abhängt, hat schon Herr Maschke gemacht. (Vergl. dessen Dissertation, 1. These.)

Um diesen Satz anwenden zu können, muss man die Frage beantworten, mit wie vielen einfachen Daten die verschiedenen möglichen Bestimmungen gleichwertig sind. Durch die folgenden Betrachtungen soll diese Aufgabe in den einfachsten und zugleich wichtigsten Fällen gelöst werden.

Es seien $r_1\ r_2 \ldots r_m$ die in absteigender Reihe ($r_1 \geqq r_2 \geqq \ldots \geqq r_m$) geordneten Ordnungszahlen der Fundamentalpunkte der einen Ebene, die ich durch I bezeichnen will; $s_1\ s_2 \ldots s_m$ seien die ebenso geordneten, auf das Hauptsystem der andern Ebene II bezüglichen Zahlen. Alle diese, sowie die Ordnung n der betrachteten Transformation sind als bekannt anzusehen, denn so lange die letztere ihrer Art nach unbestimmt bleibt, ist das vorliegende Problem überhaupt bedeutungslos.

Es bietet nun keine theoretischen Schwierigkeiten dar, die Transformationsgleichungen wirklich zu bilden. Dazu ist nur erforderlich, dass man die Gleichungen der Curven des in der einen Ebene, etwa in I, durch die Hauptpunkte bestimmten Netzes aufstellt. Ich will die letzteren durch dieselben Buchstaben bezeichnen, welche ihre Vielfachheit angeben. Die gesuchte Curvengleichung sei $f(x) = o$. Zur Bestimmung der in derselben auftretenden Coefficienten liefert jeder gegebene r-fache Punkt der Curve $\frac{1}{2} r (r + 1)$ Gleichungen, da die Einsetzung seiner Coordinaten in die $\frac{1}{2} r (r + 1)$ Differentialquotienten $(r-1)^{ter}$ Ordnung von $f(x)$ nach $x_1\ x_2\ x_3$ dieselben annullieren muss. Die Hauptpunkte $r_1 \ldots r_m$, durch welche die Curve bezüglich $r_1 \ldots r_m$ mal hindurchgehen soll, liefern daher $\Sigma \frac{1}{2} r_i (r_i + 1)$, d. i. mit Rücksicht auf die Relationen

$$\Sigma r_i = 3n - 3 \qquad \Sigma r_i^2 = n^2 - 1$$

$\frac{1}{2} (n+1)(n+2) - 3$ Gleichungen, welche ersichtlich von einander unabhängig sind. Nun können noch zwei einfache Punkte p und q der Curve beliebig angenommen werden, woraus zwei weitere Gleichungen entspringen. Mit Einschluss von $f(x) = 0$ erhält man also $\frac{1}{2} (n+1)(n+2)$ Gleichungen, welche linear und homogen in den Coefficienten von $f(x)$ sind. Diese sind ebenfalls in der Anzahl $\frac{1}{2} (n+1)(n+2)$ vorhanden und lassen sich daher gerade eliminieren; die in Determinantenform erscheinende Resultante bildet, gleich Null gesetzt, die Curvengleichung. Um anzudeuten, dass in ihr die Coordinaten von p, q und x ganz gleichartig auftreten, will ich sie durch $f(p\ q\ x) = 0$ bezeichnen.

Diese wirklich ausführbare Darstellung von $f(p\ q\ x)$ zeigt, dass die Punkte r ganz willkürlich angenommen werden dürfen,

und dass sie stets auf eine eindeutig bestimmte Curve führen, wofern nur die gefundene Determinante nicht identisch verschwindet. Dieser natürlich auszuschliessende Fall tritt bekanntlich dann und nur dann ein, wenn die Punkte ein abhängiges System bilden, d. h. wenn jede durch gewisse von ihnen gehende Curve der n^{ten} Ordnung einen oder mehrere der übrigen enthält.

Eine nähere Betrachtung erfordern eigentlich noch die Fälle, in denen mehrere Fundamentalpunkte einander unendlich nahe liegen. Ich muss jedoch aus Mangel an Raum hier auf eine nähere Ausführung dieses Punktes verzichten und bemerke nur, dass man zu folgendem Ergebniss gelangt: Die Function $f(p\,q\,x)$ bleibt in der Form, in der sie bei unbestimmt gelassener Lage der Punkte $r_1 \ldots r_m$ gebildet wird, auch in allen Fällen anwendbar, in denen diese Punkte einander zum Teil oder sämtlich unendlich nahe liegen. Es ist dies insofern von Wichtigkeit, als in den folgenden Betrachtungen die Punkte $r_1 \ldots r_m$ unbekannt sind, so dass man nicht imstande ist, etwaige Eigentümlichkeiten ihrer gegenseitigen Lage schon bei der Aufstellung der Transformationsgleichungen zu berücksichtigen.

Das hiernach für jede nicht abhängige Lage der Hauptpunkte $r_1 \ldots r_m$ eindeutig definierte Curvennetz soll nun auf die Gesamtheit der Geraden der Ebene II projectivisch bezogen werden. Diese Beziehung ist durch Angabe von vier Paaren entsprechender Punkte pP, qQ, rR, sS gerade eindeutig bestimmt, vorausgesetzt, dass p q r s einerseits, P Q R S andrerseits linear unabhängig sind. Bezeichnet, wie gewöhnlich, (P Q X) die aus den Coordinaten von P, Q, X gebildete Determinante, so sind die Transformationsgleichungen

(I.)
$$\begin{aligned} \rho.\ f(p\,q\,s).\ (P\,Q\,X) &= (P\,Q\,S).\ f(p\,q\,x) \\ \rho.\ f(q\,r\,s).\ (Q\,R\,X) &= (Q\,R\,S).\ f(q\,r\,x) \\ \rho.\ f(r\,p\,s).\ (R\,P\,X) &= (R\,P\,S).\ f(r\,p\,x) \end{aligned}$$

Infolge der charakteristischen Eigenschaft der Cremonaschen Transformationen, eindeutig umkehrbar zu sein, sind nun andrerseits die Geraden der Ebene I projectivisch auf das durch das Hauptsystem der Ebene II bestimmte Curvennetz

bezogen. Die Gleichungen der demselben angehörigen Curven, die durch F bezeichnet werden mögen, sind in derselben Weise gebildet, wie diejenigen der Curven f, nur ist das System $r_1 \ldots r_m$ durch $s_1 \ldots s_m$ ersetzt. Die Transformation wird demgemäss auch durch folgende Gleichungen definiert:

$$\begin{aligned} &\sigma.\ F\ (P\,Q\,S).\quad (p\,q\,x) = (p\,q\,s).\ F\ (P\,Q\,X) \\ &\sigma.\ F\ (Q\,R\,S).\quad (q\,r\,x) = (q\,r\,s).\ F\ (Q\,R\,X) \\ &\sigma.\ F\ (R\,P\,S).\quad (r\,p\,x) = (r\,p\,s).\ F\ (R\,P\,X) \end{aligned} \qquad \text{(II.)}$$

Da jedes der beiden Gleichungssysteme (I) und (II) für sich allein die Transformation darstellt, so muss das eine aus dem andern folgen. Und in der That, fasst man etwa (I) als die ursprünglichen Definitionsgleichungen der betrachteten Cremona'schen Verwandtschaft auf, so lassen sich dieselben bekanntlich rational nach den Coordinaten von x auflösen. Diese Auflösung wird durch die Gleichungen (II) dargestellt, wenn ich aus denselben die Punkte $s_1 \ldots s_m$, welche ja durch $r_1 \ldots r_m$ pP..sS bestimmt sind, eliminiere. Es ist von vornherein klar, dass dies möglich sein muss, und es lässt sich überdies leicht ein Weg angeben, auf welchem die Coordinaten von $s_1 \ldots s_m$ wirklich gebildet werden können. Einem beliebigen dieser Punkte s_k entspricht eine Curve der s_k^{ten} Ordnung, welche (nach der Bezeichnung von Clebsch) α_{ik} mal durch jeden Hauptpunkt r_i geht, wobei sämtliche α_{ik} bekannte Zahlen sind. Durch diese auf ihr gelegenen Punkte ist die Curve gerade bestimmt, und da sie die ihrer Ordnung zukommende Maximalzahl von vielfachen Punkten besitzt, so lassen sich die Coordinaten eines beliebigen ihrer Punkte als rationale Functionen von denen der r_i und eines Parameters darstellen. Durch Substitution derselben an Stelle von x in die Gleichungen (I) wird X zu s_k, dessen Coordinaten demgemäss ebenfalls als rationale Functionen der r_i pP...sS erhalten werden. Der in dieselben eigentlich noch eingehende Parameter muss sich in einem allen drei Coordinaten gemeinsamen, also unwesentlichen Factor absondern lassen, da s_k allen Punkten seiner zugeordneten Fundamentalcurve entspricht.

Es sind somit die Transformationsgleichungen in den beiden äquivalenten Formen (I) und (II), desgleichen die Coordinaten

der Hauptpunkte s_k rational in den $2(m+4)$ Unbekannten darstellbar. Zur Fixierung der Vorstellung sollen P Q R S vier beliebig gewählte, linear unabhängige Punkte der Ebene II sein. Dann sind die Coordinaten der Punkte $r_1 \ldots r_m$ p q r s die zu bestimmenden Unbekannten.

Nach diesen Vorbemerkungen ist der Bestimmungswert der verschiedenen möglichen Daten in den wichtigsten Fällen leicht zu ermitteln.

Es sei eine Curve $\varphi(x)=0$ gegeben, auf welcher ein bestimmter Hauptpunkt r_i liegen soll. Diese Bestimmung liefert offenbar eine Gleichung, welche von einigen der gewählten Unbekannten abhängt, nämlich $\varphi(r_i)=0$. Dasselbe gilt, wenn ein Ort $\Phi(X)=0$ für einen Hauptpunkt s_k der Ebene II gegeben ist; denn, wie soeben bewiesen wurde, sind die Coordinaten von s_k bekannte Functionen der gesuchten Unbekannten, und es ist daher $\Phi(s_k)=0$ eine Bestimmungsgleichung für dieselben. Es ist ebenso unmittelbar ersichtlich, dass die vollständige Kenntnis eines Hauptpunkts zwei unter einander unabhängige Gleichungen liefert. Somit bestehen die Sätze:

(2.) *Die Angabe eines Fundamentalpunkts ist zwei einfachen Daten äquivalent.*

(3.) *Ein geometrischer Ort für einen Fundamentalpunkt zählt als ein einfaches Datum.*

Die Kenntnis einer Curve, auf welcher μ Fundamentalpunkte liegen, von denen ν bekannt sind, besitzt demnach das Gewicht von $\mu+\nu$ einfachen Daten. Besondere Erwähnung verdient der Fall einer Fundamentalcurve. Da eine solche durch die auf ihr gelegenen Hauptpunkte gerade bestimmt ist, so sind durch die Gleichungen, welche diese vereinigte Lage ausdrücken, die in der Angabe der Fundamentalcurve liegenden Daten erschöpft. Eine Fundamentalgerade und ein Fundamentalkegelschnitt haben daher bezüglich die Gewichte 2 und 5. Eine Hauptcurve 3. Ordnung hat stets einen Doppelpunkt, welcher ein Hauptpunkt der Transformation ist. Da dieser Punkt durch die Angabe der Curve vollständig bestimmt ist, so zählt er als ein doppeltes Datum. Ausser ihm liegen noch 6 Hauptpunkte auf der Fundamentalcurve 3. Ordnung; dieselbe besitzt also das Gewicht von 8 einfachen Daten. Diese Beispiele zeigen zur Genüge, wie man in allen ähnlichen Fällen

zu verfahren hat. In Bezug hierauf ist nur noch zu bemerken, dass die Gleichungen, welche die Lage gewisser Fundamentalpunkte auf einer Curve ausdrücken, unter einander unabhängig sind. Dies folgt daraus, dass die Hauptpunkte einer Ebene sämtlich willkürlich angenommen werden dürfen, dass also von vornherein keine Lagenbeziehungen zwischen ihnen bestehen. Natürlich ist damit nicht die Möglichkeit ausgeschlossen, dass Abhängigkeitsverhältnisse eintreten können, sobald noch andere Angaben hinzukommen. Ob dies stattfindet oder nicht, und um wie viel die Zahl der unabhängigen Daten dadurch verringert wird, muss natürlich in jedem einzelnen Falle besonders untersucht werden.

Zur Bestimmung der Transformation kann ferner die Angabe entsprechender Elemente beider Ebenen dienen. Kennt man ein Paar entsprechender Punkte, so erhält man durch Einsetzung ihrer Coordinaten an Stelle von x und X in die Beziehungen (I) oder (II) nach Elimination des Proportionalitätsfactors zwei unter einander unabhängige Gleichungen. Ist dagegen der Punkt X, welcher einem gegebenen x entsprechen soll, nicht vollständig bekannt, sondern nur auf eine gegebene Curve $\Phi(X)=0$ beschränkt, so erhält man eine Gleichung, indem man in $\Phi(X)=0$ die sich aus (I) ergebenden Coordinaten von X einträgt. Ist umgekehrt ein Punkt X und eine Curve $\varphi(x)=0$ gegeben, auf welcher sein entsprechender x liegen soll, so entnimmt man die Coordinaten des letzteren aus den Gleichungen (II); durch Substitution derselben in die Curvengleichung erhält man auch in diesem Falle eine Beziehung zwischen den zu bestimmenden Unbekannten. Als Resultat dieser Betrachtung ergeben sich also die Sätze:

Die Angabe eines entsprechenden Punktepaars enthält zwei einfache Daten. (4.)

Die Angabe eines Punktes und eines geometrischen Ortes für seinen entsprechenden Punkt ist ein einfaches Datum. (5.)

(Für die quadratische und kubische Verwandtschaft hat Herr Maschke (a. a. O.) die Sätze (2) und (4) aufgestellt und durch Einzeluntersuchung fast aller überhaupt möglichen Fälle bestätigt. Er hat ausserdem die Aequivalenz einer Hauptgeraden mit 2, eines Hauptkegelschnitts mit 5 einfachen Daten in einer Anzahl von Fällen nachgewiesen.)

Neben den bisher behandelten können natürlich noch mannigfaltige andere Bestimmungen zur Festlegung einer Cremona'schen Transformation dienen. Von allgemeinerem Interesse ist indessen wohl nur noch das Datum entsprechender Curven, d. h. solcher, welche durch die Transformation gegenseitig ineinander übergeführt werden. Die Frage nach dem Bestimmungsgewicht dieses Datums hängt jedoch von so vielen mitwirkenden Factoren ab, und die verschiedenen zu unterscheidenden Möglichkeiten sind so zahlreich, dass die Durchführung dieser Betrachtung einer besonderen Untersuchung vorbehalten bleiben muss.

§ 2.

Nachdem durch die vorhergehende Untersuchung die Aequivalenzwerte der wichtigsten Daten ermittelt worden sind, kann das Gesamtgewicht jeder unabhängigen Combination derselben ohne weiteres durch Addition der Einzelgewichte gefunden werden. Sobald es sich gleich $2(m+4)$ ergiebt, ist die Transformation bestimmt. Sind jedoch die einzelnen Daten nicht unter einander unabhängig, so schliessen sie zusammen eine geringere Anzahl von Bedingungen für die Transformation ein, als die Summe der ihnen einzeln zukommenden Gewichte beträgt. Es bleibt daher noch die Frage zu erledigen, um wieviel diese Summe in solchen Fällen zu verkleinern ist.

Zur Untersuchung der Abhängigkeit von Gleichungen sind in der Theorie der Functionaldeterminanten die nötigen Mittel vorhanden. Die vorliegende allgemeine Betrachtung, welche ja nur den Zweck haben kann, die verschiedenen möglichen Formen derartiger Abhängigkeitsverhältnisse und deren Einfluss auf die Festlegung der Transformation zu ermitteln, lässt sich indessen mit einfacheren Hilfsmitteln durchführen.

Es mögen durch A, B... irgendwelche unabhängige Daten, durch $a=0..$, $b=0..$, ... die von ihnen gelieferten Gleichungen bezeichnet werden. Ein weiteres Datum D sei durch die unter einander gleichfalls unabhängigen μ Relationen $d=0..\delta=0..$ ausgedrückt. Besteht nun zwischen A B...D eine Abhängigkeit, so sind einige der von D herrührenden Gleichungen δ 0.. eine blosse Folge der übrigen $d=0..$

(deren Zahl auch Null sein kann) in Verbindung mit $a = 0..$, $b = 0.., \ldots$ Bestimme ich also aus $a = 0.., .. d = 0..$ die Unbekannten (d. h. die Coordinaten von $r_1 .. r_m$ etc.) als Functionen einer Anzahl willkürlicher Parameter, so wird durch Einsetzung derselben jede der Gleichungen $\delta = 0..$ identisch, d. h. für alle Werte jener Parameter erfüllt. Es lassen sich, mit andern Worten, aus $a = 0.., .. d = 0..$ und irgend einer der ν Gleichungen $\delta = 0..$ sämtliche Unbekannte eliminieren, was das Verschwinden der Resultanten aller ν so gebildeten Systeme erfordert. Nun ist es klar, dass jede Resultante eine Function $R(A\,B..D)$ der Daten $A\,B..D$ ist; es ist ferner evident, dass sie nicht identisch verschwinden kann. Wäre nämlich R bei beliebiger Annahme von $A\,B..D$ gleich Null, so würde daraus, der Voraussetzung entgegen, hervorgehen, dass jede Relation $\delta = 0$ eine Folge des Systems $d = 0..$ ist. Es kann auch R nicht von D frei sein, da andernfalls $R = 0$ eine Beziehung zwischen den Daten $AB..$ ausdrücken würde.

Demnach ist $R(A\,B..D) = 0$ eine wirkliche Bedingungsgleichung für D. Solcher Gleichungen existieren ν, und es ist ersichtlich, dass keine derselben aus den übrigen folgt. Im entgegengesetzten Falle würde sich mit Rücksicht auf die Unabhängigkeit von A, B.. ergeben, dass einige der Gleichungen $\delta = 0..$ aus den übrigen und aus $d = 0..$ identisch folgen. Diese Möglichkeit ist aber durch die vorausgesetzte Unabhängigkeit des Systems $d = 0..\ \delta = 0$ ausgeschlossen. Zwischen den das Datum D definierenden Grössen bestehen mithin ν wesentlich verschiedene Relationen. Fasse ich daher diese Grössen als variabel auf, so sind sie, wenn die Gleichungen $a = 0..$, $d = 0..$ vereinbar sein sollen, nicht ganz willkürlich; sie müssen vielmehr jenen ν Beziehungen genügen. Nenne ich demgemäss D ein νfach beschränktes Datum, und berücksichtige ich, dass durch das Datum D zu dem System $a = 0.., b = 0.., \ldots$ als wesentlich neue Gleichungen nur die $\mu - \nu$ durch $d = 0..$ bezeichneten hinzutreten, so ergiebt sich der Satz:

Das Gewicht eines νfach beschränkten Datums wird durch die Beschränkung um ν verringert. (6.)

Zugleich erkennt man umgekehrt, dass eine derartige Verringerung des Gewichts auch stets von einer entsprechend hohen Beschränkung begleitet ist.

Ich wende nun den Satz auf die wichtigsten speciellen Fälle an. D sei eines der in den Sätzen (2) bis (5) betrachteten Daten, sein Gewicht μ mithin bekannt. Ist nun zunächst $\nu = \mu$, also die Anzahl $\mu - \nu$ der von D herrührenden und von $a = 0 .., \ldots$ wesentlich verschiedenen Gleichungen $d = 0 ..$ gleich Null, so bedeutet dies: D ist eine Folge von A, B.. In diesem Falle führt der vorige Satz auf das folgende selbstverständliche Resultat:

(7.) *Es ist möglich, dass aus gewissen Bestimmungen A, B.., welche noch nicht zur Festlegung der Transformation genügen, doch einer oder mehrere der Fundamentalpunkte resp. Curven durch dieselben folgen, oder dass zu manchen Punkten die entsprechenden bestimmt oder auf Curven beschränkt sind. Die Angabe einer solchen schon aus den übrigen Daten folgenden Bestimmung zählt nicht als neues Datum.*

Beispiele hierfür bieten die quadratische und kubische Verwandtschaft in grosser Anzahl. So folgt aus 5 entsprechenden Punktepaaren der ersteren stets ein sechstes, während bei der Transformation 3. Ordnung durch Angabe von 7 Paaren entsprechender Punkte die Doppel-Fundamentalpunkte beider Ebenen (dreideutig) bestimmt sind.

Ist $\mu - \nu$ nicht Null, so muss $\mu > 1$ sein. Es kann also D nur noch einen Hauptpunkt, eine durch mehrere Hauptpunkte gehende Curve, insbesondere eine Fundamentalcurve, oder ein entsprechendes Punktepaar bezeichnen. Im ersten Fall ist $\mu = 2$, $\nu = 1$. Es besteht mithin zwischen den Coordinaten des Hauptpunkts eine Gleichung, d. h. derselbe ist auf eine Curve beschränkt. Also:

(8.) *Die Angabe eines einfach beschränkten Fundamentalpunktes, d. h. eines solchen, den man infolge anderweitiger Bestimmungen (AB..) gezwungen ist, auf einer durch dieselben festgelegten Curve zu wählen, bildet ein einfaches Datum.*

Ebenso unmittelbar ergiebt sich:

(9.) *Das Gewicht einer Fundamentalcurve erniedrigt sich um die Anzahl der bei ihrer Wahl infolge anderer Daten zu berücksichtigenden Bedingungen.*

Im Falle eines Punktepaares xX ist $\mu = 2$, also $\nu = 1$. Es besteht mithin eine Gleichung $F(xX) = 0$. Diese sagt aus, dass nach willkürlicher Annahme irgend eines Punktes (x oder X)

der entsprechende desselben nur noch auf einer dadurch bestimmten Curve gewählt werden darf. Durch Anwendung des Satzes (6) auf diesen Fall ergiebt sich:

Ein durch andere Daten einfach beschränktes Punktepaar, (10.)
d. h. ein solches, von dem nur der eine Punkt willkürlich gewählt werden darf, während der andere auf einer dadurch bestimmten Curve angenommen werden muss, bildet ein einfaches Datum.

(Die Existenz solcher von andern Daten abhängigen Punktepaare hat zuerst Herr Maschke hervorgehoben und die Aequivalenz von je zweien derselben mit einem unabhängigen bei der Untersuchung der Transformation 3. Ordnung in allen Fällen nachgewiesen.)

Die abgeleiteten Sätze geben an, welche Abhängigkeitsverhältnisse eintreten können, und welches ihr Einfluss auf die Festlegung der Transformation ist. In welchen Fällen sie aber eintreten, das lässt sich bei der unabsehbaren Mannigfaltigkeit von möglichen Combinationen verschiedener Daten nicht wohl anders als durch Specialuntersuchung entscheiden. Nur die einfachsten Fälle, die freilich zugleich das grösste Interesse darbieten, lassen sich bis zu einem gewissen Grade einer allgemeinen Betrachtung unterwerfen. Ich will einige derselben wenigstens andeuten.

Man kann sich bei jeder Transformation die Aufgabe stellen, dieselbe allein durch Angabe von Hauptpunkten festzulegen. Im allgemeinen muss man zu diesem Zwecke nach Satz (1) und (2) $m+4$ derselben angeben. Nun bestehen aber zwischen beiden Hauptsystemen, sobald $2m > m+4$, d. h. sobald die Transformation von höherer als der 2. Ordnung ist,[9]) Be-

[9]) Aus den Formeln $\Sigma r_i = 3(n-1)$, $\Sigma r_i^2 = n^2-1$ (S. 5) folgert man leicht, dass eine Cremona'sche Transformation n^{ter} Ordnung mindestens $9(n-1) : (n+1)$ Fundamentalpunkte besitzt. Es ist nämlich wegen der evidenten Beziehung: $mp^2 \leqq \Sigma\,(p+\alpha_i)^2$ für $\Sigma\,\alpha_i = 0$, klar, dass

$$m\left(\frac{1}{m}\Sigma\, r_i\right)^2 \leqq \Sigma r_i^2, \quad \text{d. h.} \quad \frac{1}{m}\cdot\ 9(n-1)^2 \leqq n^2-1$$

also

$$m \geqq \frac{9\,(n-1)}{(n+1)}$$

ist.

(Uebrigens ist dies die engste angebbare untere Grenze für m, da sie für jeden Wert von n wirklich erreicht wird.) Speciell folgt $m > 4$ für $n > 2$, $m \geqq 9$ für $n > 17$.

ziehungen, deren Anzahl $4m-2(m+4) = 2(m-4$ ist). Wenn es unter diesen Relationen solche giebt, oder wenn aus ihnen solche abgeleitet werden können, die von $m+4$ oder weniger Hauptpunkten abhängen, so dürfen letztere nicht willkürlich angenommen werden. Dieser Umstand kann, da die in Rede stehenden Beziehungen natürlich projectivischer Natur sind und mithin mindestens 5 Punkte jedes Systems betreffen, erst für $m+4 \geqq 2.5$, d. h. $m \geq 6$ eintreten. Dies findet zuerst bei der im folgenden speciell zu behandelnden biquadratischen Transformation statt, bei welcher ich daher auf diesen Punkt näher eingehen werde.

Andrerseits kann man jede Cremona'sche Transformation durch alleinige Angabe von entsprechenden Punktepaaren festzulegen suchen. Im allgemeinen muss die Anzahl derselben nach (1) und (4) $m+4$ betragen. Folgt jedoch aus irgend p derselben eine von den die Transformation bestimmenden Unbekannten freie Beziehung $F(xX) = 0$, so ergiebt sich mit Rücksicht auf Satz (10), dass nur p Paare entsprechender Punkte ganz willkürlich gewählt werden dürfen, und dass alsdann noch $2(m+4-p)$ Paare, welche der durch die ersten p bestimmten Gleichung $F(xX) = 0$ genügen, anzunehmen sind, ehe die Transformation festgelegt ist.

Ob eine derartige Abhängigkeit zwischen $p+1$ Punktepaaren ($p < m+4$) besteht, und welches ihre Form ist, lässt sich im allgemeinen am leichtesten durch geometrische Betrachtungen erkennen. Es seien $\varphi(xX) = 0$ $\psi(xX) = 0$ die Transformationsgleichungen, welche beide von den $2(m+4)$ Unbekannten abhängen. Soll aus p Punktepaaren $aA \ldots nN$ eine Beziehung $F(xX) = 0$ folgen, so müssen die Unbekannten aus den $2(p+1)$ Gleichungen $\varphi(xX) = 0$, $\psi(xX) = 0$, $\varphi(aA) = 0$ $\ldots$ $\psi(nN) = 0$ eliminiert werden können. Dies ist, wie man leicht beweist, nur möglich, wenn aus $\varphi(xX) = 0$ $\psi(xX) = 0$ eine Relation $\chi(xX) = 0$ abgeleitet werden kann, welche nur von p festen, die Unbekannten enthaltenden Ausdrücken abhängt. Durch Elimination derselben aus $\chi(xX) = 0$ $\chi(aA) = 0$ $\ldots \chi(nN) = 0$ ergiebt sich alsdann $F(xX) = 0$, welches demnach dieselbe Function wie $\chi(xX)$ ist, abgesehen davon, dass die in $\chi(xX)$ unbestimmten Coefficienten in $F(xX)$ durch die Daten $aA \ldots nN$ ausgedrückt erscheinen. Die Frage ist daher im

wesentlichen auf folgende reduciert: kann aus $\varphi(xX) = 0$ $\psi(xX) = 0$ eine Beziehung $\chi(xX) = 0$ abgeleitet werden, in welcher die Unbekannten nur in $p < m + 4$ festen Verbindungen auftreten? Nun bezeichnet $\chi(xX) = 0$ eine gewisse Zuordnung der Punkte beider Ebenen, der Art, dass jedem Punkte der einen eine ganze Punktreihe der andern entspricht. Indem man die verschiedenen, bei einer bestimmten Transformation möglichen Zuordnungen dieser Art aufsucht (wie schon bemerkt wurde, führt zu diesem Ziele am einfachsten die geometrische Interpretation), kann man entscheiden, ob sich unter denselben solche befinden, welche durch weniger als $m + 4$ Punktepaare festgelegt werden. Ist dies der Fall, so dürfen zur Bestimmung der Transformation offenbar nur so viele willkürliche Paare entsprechender Punkte angenommen werden, als zur Fixierung der niedrigsten jener Beziehungen notwendig sind; dieser letzteren gemäss müssen alsdann die übrigen Punktepaare gegeben werden.

Von hervorragendem Interesse sind unter den Relationen $\chi(xX) = 0$ diejenigen, welche die Projectivität zweier Curvenbüschel ausdrücken. Es wäre dies um so mehr der Fall, wenn sich die auf Induction begründete Vermutung, für welche ich allerdings noch keinen Beweis habe finden können, bestätigen sollte, dass nur bei ihnen überhaupt die Möglichkeit vorhanden ist, durch weniger als $m + 4$ Punktepaare bestimmt zu sein.

Ich kehre nun nochmals zu dem Ausgangspunkt dieser Betrachtung zurück (S. 10, 11). Irgend welche Daten A B..D liefern die Gleichungen $a = 0..$, $b = 0..$, ..., $d = 0..$ $\delta = 0...$ Aus jeder der letzteren $\delta = 0..$ in Verbindung mit den übrigen lassen sich die Unbekannten eliminieren; das Resultat ist eine Bedingung $R(A B..D) = 0$ für das Datum D. Dieses letztere ist somit, wenn ν die Zahl der Gleichungen $\delta = 0..$ bezeichnet, ν Bedingungen $R = 0..$ unterworfen. Wird es diesen gemäss gewählt, so verringert sich sein Gewicht um eben so viel. Es ist jedoch die Möglichkeit bisher noch unerledigt geblieben, dass D ohne Rücksicht auf jene Bedingungen gegeben sein könnte. In diesem Falle liefern die Daten A B..D dieselben Gleichungen $a = 0..$, $b = 0..$, ..., $d = 0..$ $\delta = 0..$ wie vorher; aber offenbar sind jetzt die letzten ν : $\delta = 0..$ keine Folge der übrigen, denn dies würde eben das Bestehen der Relationen

$R = 0..$ erfordern. Das Gewicht des Datums D ist daher nicht vermindert, sobald dasselbe ganz willkürlich angenommen wird. Es frägt sich nur noch, ob und welche Besonderheiten der Transformation dadurch entstehen. Bei rein geometrischer Betrachtung wird man auf einen scheinbaren Widerspruch geführt. Um die Vorstellungen zu fixieren, will ich D als ein entsprechendes, einfach beschränktes Punktepaar ansehen. In folge anderer Bestimmungen A B.. soll also nur der eine Punkt x desselben willkürlich angenommen werden, für den andern X ist dadurch ein Ort bestimmt. Wird X auf demselben angenommen, so stellt x X ein einfaches Datum dar. Wird dagegen X ebenfalls willkürlich angenommen, so bildet x X wie gewöhnlich ein doppeltes Datum; aber es entsteht der Widerspruch, dass jede dieser Annahme gemäss bestimmte Transformation einerseits die willkürlichen Punkte x und X einander zuordnen, andererseits x in einen Punkt überführen soll, der auf einer nicht durch X gehenden Curve liegt. Dieser Widerspruch kann indessen nur ein scheinbarer sein, denn bei algebraischer Auffassung ist es klar, dass aus $2(m+4)$ unabhängigen Gleichungen die darin auftretenden Unbekannten stets widerspruchsfrei hervorgehen, dass also durch Substitution derselben auch die Transformationsgleichungen (I) oder (II) nicht illusorisch werden können. Die Erklärung des Paradoxons ergiebt sich daraus, dass diese Gleichungen Specialformen einschliessen, welche eine Ausartung der Transformation bezeichnen. In einer solchen können, und dadurch würde das obige Beispiel aufgeklärt werden, einigen Punkten der einen Ebene unendlich viele der andern entsprechen, oder es können unendlich viele Hauptpunkte auftreten.

Es ist auch leicht ersichtlich, wie durch die gemachten Annahmen eine derartige Degeneration hervorgerufen werden kann. Durch Elimination der Unbekannten aus $a = 0..$ $b = 0..$, $d = 0..$ und $\delta = 0$ soll sich $R = 0$ ergeben. Wird nun die Elimination, wie es notwendig ist, auf rationalem Wege vorgenommen, so kann sie nur auf ein Resultat von der Form

$$\Phi(a.., b.., \ldots, d..) = \Psi.R$$

führen, wo Φ eine ganze Function der Ausdrücke a..b.. etc. ist, während in Ψ, ebenfalls einer ganzen Function, offenbar

die zu eliminierenden Unbekannten vorkommen. Für $a = 0 \ldots$ etc. muss $\Phi = 0$ werden. Daraus folgt, wenn R nicht verschwindet, $\Psi = 0$. Diese Gleichung drückt eine Besonderheit der Transformation aus, da sie zwischen deren bestimmenden Grössen eine Relation festlegt.

Die letzten Betrachtungen weisen auf die Existenz gewisser Degenerationsformen der Cremona'schen Transformationen, sowie auf ihre Wichtigkeit für das Problem der Bestimmbarkeit derselben hin. Es entsteht damit die Aufgabe einer Untersuchung und einer übersichtlichen Aufzählung dieser speciellen Formen. Ich muss jedoch hier, um den Umfang der vorliegenden Arbeit nicht zu sehr auszudehnen, auf die Durchführung der angedeuteten Untersuchung verzichten und mich auf einige orientierende Bemerkungen beschränken.

Ich habe die Cremona'sche Transformation als hervorgehend aus der projectivischen Beziehung der Geraden einer Ebene auf die Curven eines speciellen Netzes definiert. Hiernach ergiebt sich eine doppelte Quelle von degenerierten Transformationen: es kann die projectivische Beziehung eine specielle sein, oder es kann das benutzte Curvennetz besondere Eigentümlichkeiten besitzen. Hervorzuheben ist der Fall, in dem sämtliche Curven des Netzes einen gemeinsamen Bestandteil haben, ohne dass andere Besonderheiten eintreten. In diesem Falle erniedrigt sich die Ordnung der Transformation, dieselbe nimmt jedoch keinen Ausnahmscharakter an; ich will sie daher als „reduciert" bezeichnen. In allen übrigen Fällen treten jedoch Eigentümlichkeiten ein, welche die Bezeichnung „uneigentliche Transformation" rechtfertigen. Den verschiedenen Punkten einer Ebene entspricht gewöhnlich ein und derselbe in der anderen; oft besitzen auch alle Punkte einer Curve die charakteristischen Eigenschaften der Fundamentalpunkte. Diese Andeutungen werden genügen, um so mehr, als ich mich auch bei der Untersuchung der biquadratischen Verwandtschaft auf die Betrachtung der eigentlichen Transformation mit Einschluss der reducierten Formen beschränken werde.

Die Cremona'sche Transformation 4. Ordnung.

§ 1.

Die Eigenschaften der Cremona'schen Transformation 4. Ordnung, welche in jeder Ebene drei doppelte und drei einfache Fundamentalpunkte besitzt,[10]) ergeben sich am einfachsten, wenn man dieselbe in eine Folge zweier quadratischen Transformationen auflöst. Es ist dies bekanntlich stets und, von blos collinearen Veränderungen abgesehen, nur auf eine Weise möglich, während auch umgekehrt die successive Anwendung zweier Transformationen 2. Ordnung stets einer biquadratischen (im weitesten Sinne) äquivalent ist. Indem ich diese Zerlegung vornehme, führe ich zugleich eine bequeme, im Folgenden stets festgehaltene Bezeichnung ein.

Zwischen zwei Ebenen I und III nehme ich eine quadratische Verwandtschaft an, durch welche jedem Punkte x in I ein Punkt ξ in III zugeordnet wird. Speciell seien e_1 ε_1, e_2 ε_2, e_3 ε_3 drei feste Paare entsprechender Punkte. Die Hauptsysteme der Transformation seien d_1 d_2 d_3 in I, δ_1 δ_2 δ_3 in III. Die Indices bestimme ich so, dass d_i sämtlichen Punkten der Geraden $[\delta_k\ \delta_l]$ entspricht, wofern i k l eine Permutation von 1 2 3 bedeutet.[11]) Diejenigen Hauptpunkte, welche bei dieser Wahl der Bezeichnung denselben Index erhalten, nenne ich correspondierend.

Ich führe nun die Ebene III durch eine neue quadratische Verwandtschaft, welche ξ in X transformiert, in eine andere Ebene II über. Zu Hauptpunkten in III wähle ich ε_1 ε_2 ε_3; ihre correspondierenden in II seien D_1 D_2 D_3. Die den Punkten δ_1 δ_2 δ_3 entsprechenden bezeichne ich endlich mit E_1 E_2 E_3.

Die dergestalt zwischen den Punkten x und X der Ebenen I und II hergestellte Beziehung ist bekanntlich eine biquadratische Transformation. In der That: bewegt sich X auf einer Geraden, so beschreibt ξ einen δ_1 δ_2 δ_3 enthaltenden Kegelschnitt und mithin X eine Curve 4. Ordnung, welche D_1 D_2 D_3

[10]) Ich werde diesen Zusatz in der Folge stets unterdrücken, da diejenige Transformation 4. Ordnung, bei welcher ein dreifacher und sechs einfache Hauptpunkte in jeder Ebene auftreten, nie in Betracht kommen wird.

[11]) Ich werde dies stets durch i, k, l = 1, 2, 3 andeuten.

zu Doppelpunkten hat und ausserdem durch E_1 E_2 E_3 hindurchgeht. Dem Netz der Geraden in I entspricht mithin ein Curvennetz 4. Ordnung in II, und die Beziehung zwischen ihnen ist eine projectivische, weil beide auf das Kegelschnittnetz in III projectivisch bezogen sind. Dies sind gerade die charakteristischen Eigenschaften einer Transformation 4. Ordnung. Dementsprechend findet man auch umgekehrt, dass einer in II gelegenen Geraden in der Ebene I eine Curve 4. Ordnung entspricht, welche d_1 d_2 d_3 als Doppelpunkte und e_1 e_2 e_3 als einfache Punkte enthält.

Hiernach bilden die Punkte D und E, sowie d und e die Hauptsysteme der Transformation. Es erweist sich als sehr bequem, eine getrennte Bezeichnung für beide Arten einzuführen. Ich werde D und d Doppelpunkte, E und e Grundpunkte nennen. Zwischen denselben besteht eine gewisse paarweise Zuordnung. Irgend einer der Punkte δ oder ε correspondiert nämlich einem Doppelpunkt der einen Ebene (I oder II) und entspricht gleichzeitig dem denselben Index tragenden Grundpunkt der andern Ebene. Ich bezeichne diese Zuordnung, welche wie die analoge bei der quadratischen Verwandtschaft kein Entsprechen im Sinne der Transformation ist, ebenfalls als Correspondenz.[12])

[12]) Eine solche paarweise Zuordnung der Hauptpunkte beider Ebenen findet bei jeder Cremona'schen Transformation statt. Es folgt dies unmittelbar aus einem schon von Cremona angegebenen Satze, der von Clebsch bewiesen worden ist. (Math. Ann. 4.) Ordnet man die Fundamentalpunkte in Gruppen, indem man diejenigen von gleicher Ordnungszahl zusammenfasst, so stimmen nach diesem Satze die Anzahlen der in diesen Gruppen enthaltenen Punkte, von ihrer Reihenfolge abgesehen, in beiden Ebenen überein. Jede Fundamentalcurve geht gleich oft durch alle Punkte derselben Gruppe; eine Ausnahme hiervon bildet indessen eine Gruppe, von deren Punkten einer eine andere Ordnungszahl in Bezug auf die Curve besitzt, als die übrigen, welche ihrerseits jedoch übereinstimmen. Der eine auf diese Weise ausgezeichnete Punkt ist dadurch dem Hauptpunkt der andern Ebene, welcher der betrachteten Fundamentalcurve entspricht, zugeordnet. Man erkennt auch leicht, dass diese Zuordnung eine gegenseitige ist. Ich bemerke noch, dass, wenn es eine aus zwei Punkten bestehende Gruppe oder mehrere je einen Punkt enthaltende Gruppen giebt, dann in Bezug auf die Zuordnung dieser Fundamentalpunkte mehrere Möglichkeiten bestehen, so dass in diesen Fällen noch eine an sich willkürliche Festsetzung getroffen werden muss.

Dem Punkte d_i entspricht infolge der Transformation (I III) die Gerade $[\delta_k\ \delta_l]$, und diese geht durch die Transformation (III II) in den Kegelschnitt $[D_1\ D_2\ D_3\ E_k\ E_l]$ über. Dem Punkte e_i entspricht dagegen ε_i in III, mithin $[D_k\ D_l]$ in II. In gleicher Weise erkennt man, dass D_i und E_i in $[d_1\ d_2\ d_3\ e_k\ e_l]$ resp. $[d_k\ d_l]$ übergehen. Es gelten somit folgende Sätze:

Jedem Doppelpunkt der einen Ebene entspricht der Kegelschnitt, welcher durch die ihm nicht correspondierenden Grundpunkte und durch die Doppelpunkte der andern Ebene geht.

Jedem Grundpunkt der einen Ebene entspricht die Gerade, welche die ihm nicht correspondierenden Doppelpunkte der andern Ebene verbindet.

Nachdem die bei der biquadratischeu Transformation auftretenden Fundamentalcurven ermittelt sind, kann man, ohne die Hilfsebene III zu benutzen, leicht angeben, welcher Art die Curve ist, die einer anderen gegebenen entspricht. Irgend einer in der Ebene I gelegenen Curve C der m^{ten} Ordnung entspricht zunächst in II eine solche der $4m^{ten}$ Ordnung, welche durch jeden Doppelpunkt der Transformation 2m mal, durch jeden Grundpunkt m mal geht. Dieselbe enthält indessen als integrierende Bestandteile diejenigen Fundamentalcurven, deren entsprechende Hauptpunkte auf C liegen. Nenne ich die nach Absonderung derselben verbleibende Curve Γ, ihre Ordnung μ, und lasse ich endlich die Buchstaben d, e, D, E zugleich angeben, wie vielfach der durch jeden derselben bezeichnete Hauptpunkt in Bezug auf C resp. Γ ist, so ergeben sich demgemäss die Formeln:

$$\mu = 4m - 2\Sigma d - \Sigma e \qquad m = 4\mu - 2\Sigma D - \Sigma E$$
$$D_i = 2m - \Sigma d - e_k - e_l \qquad d_i = 2\mu - \Sigma D - E_k - E_l$$
$$E_i = m - d_k - d_l \qquad e_i = \mu - D_k - D_l$$

(Man verificiert leicht, dass von diesen beiden Formelsystemen das eine aus dem andern folgt.)

Ich stelle die einfachsten und wichtigsten Fälle kurz zusammen. Es entsprechen einander gegenseitig:

die Punkte	x, y..	die Punkte	X, Y...
der Grundpunkt	e_i	die Gerade	$[D_k\ D_l]$
der Doppelpunkt	d_i	der Kegelschnitt	$[D_1\ D_2\ D_3\ E_k\ E_l]$

die Gerade	$[x\ y]$	die Curve 4. Ordn.	$[(D_1\ D_2\ D_3)\ E_1\ E_2\ E_3\ X\ Y]$ [13])
die Gerade	$[e_i\ x]$	die Curve 3. Ordn.	$[(D_i)\ D_k\ D_1\ E_1\ E_2\ E_3\ X]$ [13])
die Gerade	$[d_i\ x]$	der Kegelschnitt	$[D_1\ D_2\ D_3\ E_i\ X]$
die Gerade	$[e_i\ e_k]$	der Kegelschnitt	$[D_i\ D_k\ E_1\ E_2\ E_3]$
die Gerade	$[d_i\ e_k]$	die Gerade	$[D_k\ E_i]$
die Gerade	$[d_i d_k]$	der Punkt	E_l
der Kegelschnitt	$[d_1\ d_2\ d_3\ x\ y]$	der Kegelschnitt	$[D_1\ D_2\ D_3\ X\ Y]$
der Kegelschnitt	$[d_1\ d_2\ e_i\ e_k\ x]$	der Kegelschnitt	$[E_1\ E_2\ D_i\ D_k\ X]$
der Kegelschnitt	$[d_1\ d_2\ d_3\ e_i\ x]$	die Gerade	$[D_i\ X]$
der Kegelschnitt	$[d_1\ d_2\ d_3\ e_i\ e_k]$	der Punkt	D_l

u. s. w.

Im Anschluss hieran bemerke ich noch, um mich später darauf beziehen zu können, Folgendes. Die Punkte zweier entsprechenden Curven sind einander gegenseitig eindeutig zugeordnet. Im Falle von Unicursalcurven besteht daher bei Einführung irgend einer Parameterdarstellung für jede derselben eine bilineare Beziehung zwischen den Parametern entsprechender Punkte. (Vgl. Salmon-Fiedler, Höh. Eb. C. Art. 351.) Zwischen den beiden einander durch die Transformation zugeordneten unicursalen Punktreihen besteht mithin eine Beziehung, die man wohl als projectivisch bezeichnen darf; dieselbe ist durch Angabe von drei entsprechenden Punktepaaren festgelegt.

Nach obiger Tabelle entsprechen einander z. B. die Geraden $[d_1\ e_1]$ und $[D_1\ E_1]$; d. h. wird die erste von einem Punkte x durchlaufen, so beschreibt dessen zugeordneter X die zweite. Die Beziehung dieser beiden so gebildeten Punktreihen soll zufolge der vorstehenden Bemerkung eine projectivische sein. Man verificiert diese Behauptung sofort, wenn man beachtet, dass die Punktreihe x mit dem Strahlbüschel $[d_2\ x]$, dieses mit dem ihm entsprechenden Kegelschnittsbüschel $[D_1\ D_2\ D_3\ E_2\ X]$ und letzteres endlich mit der Punktreihe X projectivisch ist, welche es auf der durch einen seiner Basispunkte D_1 gehenden Geraden $[D_1\ E_1]$ ausschneidet. Diese Betrachtung lässt zugleich einige specielle Punktepaare der projectivischen Beziehung erkennen, z. B.:

---

[13]) Die in doppelte Klammern eingeschlossenen Punkte sind Doppelpunkte der betreffenden Curven.

d_1 und der Schnittpunkt von $[D_1\ E_1]$ mit $[D_1\ D_2\ D_3\ E_2\ E_3]$ e_1 und der Schnittpunkt von $[D_1\ E_1]$ mit $[D_2\ D_3] : (D_1\ E_1, D_2\ D_3)$ die Schnittpunkte $(d_1\ e_1, d_i\ e_k)$ und $(D_1\ E_1, E_i\ D_k)$ $[i, k = 2, 3]$ etc.

Aehnlich weist man den projectivischen Zusammenhang zwischen den Punktreihen $[e_i\ e_k]$ und $[D_i\ D_k\ E_1\ E_2\ E_3]$, $[d_1\ d_2\ e_i\ e_k\ x]$ und $[D_i\ D_k\ E_1\ E_2\ X]$ u. s. w nach.

§ 2.

Die Grundlage für die weitere Untersuchung der biquadratischen Transformation bilden gewisse projective Beziehungen, welche zwischen den Hauptsystemen beider Ebenen, sei es allein, sei es in Verbindung mit entsprechenden Punktepaaren, bestehen. Dieselben ergeben sich am einfachsten auf dem folgenden synthetischen Wege. Jeder durch einen Doppelpunkt d_i gehende Strahl wird in einen durch dessen correspondierenden Grundpunkt E_i und durch die Doppelpunkte $D_1\ D_2\ D_3$ gehenden Kegelschnitt transformiert; beide sind einander in den Büscheln, welche sie beschreiben, projectivisch zugeordnet. Wenn ich nun jedem Kegelschnitt die an ihn in E_i gezogene Tangente zuordne, dann ist bekanntlich auch das Büschel dieser Tangenten auf das Kegelschnittbüschel und durch dessen Vermittlung auf das durch d_i gelegte Strahlbüschel projectivisch bezogen. Die so erkannte Beziehung lässt sich nun durch drei leicht angebbare Paare entsprechender Strahlen fixieren. Dem Strahle $[d_i\ e_a]$ entspricht der in die Geraden $[D_a\ E_i]\ [D_b\ D_c]$ (a, b, c = 1, 2, 3) zerfallende Kegelschnitt, welcher in E_i die Tangente $[D_a\ E_i]$ hat. Somit folgt, wenn ich die dem Strahle $[d_i\ x]$ zugeordnete Tangente des Kegelschnitts $[D_1\ D_2\ D_3\ E_i\ X]$ durch $[E_i\ E_i]$ andeute:

$$d_i\ (e_1\ e_2\ e_3\ x) = E_i\ (D_1\ D_2\ D_3\ E_i)$$

(Ich bezeichne, wie es üblich ist, durch das Symbol a (b c d e) das Doppelverhältniss der von a nach b c d e gehenden Strahlen.) Mit Rücksicht nun darauf, dass

$$E_i\ (D_1\ D_2\ D_3\ E_i) = X\ (D_1\ D_2\ D_3\ E_i)$$

ist, ergiebt sich die fundamentale Relation:

(1 a.) $$d_i\ (e_1\ e_2\ e_3\ x) = X\ (D_1\ D_2\ D_3\ E_i) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Die ganze Entwicklung bleibt offenbar giltig, wenn beide Ebenen ihre Rollen wechseln, was sich bei der eingeführten

Bezeichnung durch Vertauschung der kleinen und grossen Buchstaben ausdrückt. Es ist also zweitens

$$x\ (d_1\ d_2\ d_3\ e_i) = D_i\ (E_1\ E_2\ E_3\ X) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1b.}$$

Unter den von d_i ausgehenden Strahlen giebt es noch zwei ausgezeichnete, die nach den beiden andern Doppelpunkten gehenden. Einem derselben $[d_i\ d_k]$ entspricht im Büschel $[D_1\ D_2\ D_3\ E_i]$ der Kegelschnitt $[D_1\ D_2\ D_3\ E_i\ E_l]$. Durch Anwendung der ersten obigen Beziehung auf diese beiden Gebilde folgt

$$d_i\ (e_1\ e_2\ e_3\ d_k) = E_l\ (D_1\ D_2\ D_3\ E_i) \qquad (i, k, l = 1, 2, 3) \tag{2a.}$$

und durch Vertauschung der grossen und kleinen Buchstaben

$$e_l\ (d_1\ d_2\ d_3\ e_i) = D_i\ (E_1\ E_2\ E_3\ D_k) \qquad (i, k, l = 1, 2, 3) \tag{2b.}$$

Die vorstehende Betrachtung stützt sich allein auf die projectivische Zuordnung der Büschel $[d_i\ x]$ und $[D_1\ D_2\ D_3\ E_i\ X]$. Da diese offenbar auch bei allen Ausartungsformen der Transformation erhalten bleibt, so verlieren auch die gewonnenen Resultate nie ihre Giltigkeit. Aber es ist allerdings möglich und tritt in der That ein, dass dieselben in speciellen Fällen teilweise illusorisch werden, indem einige der in den Relationen (1) (2) auftretenden Doppelverhältnisse einen unbestimmten Wert annehmen oder einander identisch gleich werden.

Nehme ich jetzt umgekehrt zwei Gruppen von Punkten d, e; D, E an, welche sämtlichen Bedingungen (2 a, b) genügen und für welche die Formeln (1 a, b) untereinander vereinbar sind, so ist die durch letztere vermittelte Zuordnung der Punkte x X eine gegenseitig eindeutige. Die auf diese Weise definierte Transformation ist mithin eine Cremona'sche, und es ist leicht weiter zu beweisen, dass sie eine biquadratische ist, deren Hauptsysteme d, e; D, E sind. Es genügt zu diesem Behufe, die von einem der Punkte x X beschriebene Curve aufzusuchen, wenn der andere eine Gerade durchläuft. Bewegt sich z. B. x auf einer Geraden g, so werden dadurch die Strahlenbüschel $[d_1\ x]$, $[d_2\ x]$, mithin nach (1a) die Kegelschnittbüschel $[D_1\ D_2\ D_3\ E_1\ X]$, $[D_1\ D_2\ D_3\ E_2\ X]$ in projectivische Beziehung gesetzt. Das Erzeugniss der letzteren ist bekanntlich eine Curve 4. Ordnung, welche $D_1\ D_2\ D_3$ als Doppelpunkte enthält und ausserdem durch $E_1\ E_2$ geht. Sie geht endlich auch durch E_3, denn in diesen Punkt gelangt X den

Relationen (1a) und (2a) zufolge, wenn x in den Schnittpunkt von g mit $[d_1\ d_2]$ fällt. Ebenso findet man als Hauptsystem in I: d, e, und erkennt man $d_i\ E_i$ und $e_i\ D_i$ (i = 1, 2, 3) als correspondierend.

Die projectivischen Beziehungen (1) (2) sind mithin für die biquadratische Verwandtschaft charakteristisch und können daher dem Studium derselben zu Grunde gelegt werden. Dies steht damit in Einklang, dass sie eigentlich nur verschiedene Formen der Definitionsgleichungen der Transformation sind. Man erkennt dies, wenn man sich die Doppelverhältnisse durch die Coordinaten der in ihnen auftretenden Punkte in bekannter Weise ausgedrückt denkt.

Indem ich zu einer näheren Betrachtung dieser Beziehungen übergehe, untersuche ich zunächst den Zusammenhang, in dem sie stehen; denn dass sie nicht sämtlich von einander unabhängig sein können, ist mit Rücksicht auf ihre grosse Anzahl klar. Ich stütze mich dabei auf folgende leicht zu erweisende Identitäten, deren erste der bekannte Satz von Möbius ist:

(α.) $\quad a\,(b\,c\,d\,e)\,.\,a\,(b\,c\,e\,f)\,.\,a\,(b\,c\,f\,d) = 1$
oder $a\,(b\,c\,f\,e) : a\,(b\,c\,f\,d) = a\,(b\,c\,d\,e)$

(β.) $\quad a\,(c\,d\,e\,f) : b\,(c\,d\,e\,f) = c\,(e\,f\,a\,b) : d\,(e\,f\,a\,b) = e\,(a\,b\,c\,d) : f\,(a\,b\,c\,d)$

(γ.) $\quad c\,(a\,b\,d\,e)\,.\,d\,(a\,b\,e\,c)\,.\,e\,(a\,b\,c\,d) = 1$
oder $c\,(a\,b\,e\,d) : d\,(a\,b\,e\,c) = e\,(a\,b\,c\,d)$

Ich benutze diese Identitäten zunächst dazu, die Gleichungen (1) (2) noch in einer dritten, in Bezug auf beide Hauptsysteme symmetrischen Form darzustellen. Es ist nach (1a)

$$d_k\,(e_1\ e_2\ e_3\ x) = X\,(D_1\ D_2\ D_3\ E_k)$$
$$d_i\,(e_1\ e_2\ e_3\ x) = X\,(D_1\ D_2\ D_3\ E_i)$$

Durch Division folgt hieraus mit Rücksicht auf (α) und (β)

(1c.) $\quad x\,(e_1\ e_2\ d_i\ d_k) = e_3\,(e_1\ e_2\ d_i\ d_k)\,.\,X\,(D_1\ D_2\ E_i\ E_k)\quad (i, k = 1, 2, 3)$

Durch Vertauschung beider Ebenen ergiebt sich

$$X\,(E_1\ E_2\ D_i\ D_k) = E_3\,(E_1\ E_2\ D_i\ D_k).\ x\,(d_1\ d_2\ e_i\ e_k)$$

(1d.) oder $X\,(D_1\ D_2\ E_i\ E_k) = E_1\,(D_1\ D_2\ E_i\ E_k).\ x\,(e_1\ e_2\ d_i\ d_k)\ (i, k = 1, 2, 3)$

Aus (1c) und (1d) erhält man endlich noch die Gleichung

(2c.) $\quad e_3\,(e_1\ e_2\ d_i\ d_k)\,.\,E_1\,(D_1\ D_2\ E_i\ E_k) = 1$

die sich übrigens auch aus den Beziehungen (2a) ableiten lässt.

In diesen Relationen, zu denen ich der Vollständigkeit halber noch die folgende, aus

$$d_i\ (e_1\ e_2\ e_3\ d_l) = E_k\ (D_1\ D_2\ D_3\ E_i)$$
$$d_i\ (e_1\ e_2\ e_3\ d_k) = E_l\ (D_1\ D_2\ D_3\ E_i)$$

hervorgehende

$$d_i\ (e_1\ e_2\ d_k\ d_l) = E_k\ (D_1\ D_2\ D_3\ E_i) : E_l\ (D_1\ D_2\ D_3\ E_i) \qquad (2\,d.)$$

hinzufüge, können noch die Indices 1 2 3 durch eine beliebige Permutation a b c dieser Zahlen ersetzt werden. Ich stelle die Gleichungen in dieser allgemeinsten Gestalt zusammen:

$$d_i\ (e_a\ e_b\ e_c\ x) = X\ (D_a\ D_b\ D_c\ E_i) \qquad (1\,a.)$$
$$x\ (d_i\ d_k\ d_l\ e_a) = D_a\ (E_i\ E_k\ E_l\ X) \qquad (1\,b.)$$
$$x\ (d_i\ d_k\ e_a\ e_b) = X\ (E_i\ E_k\ D_a\ D_b) : E_l\ (E_i\ E\ D\ D_b) \qquad (1\,c.)$$
$$x\ (d_i\ d_k\ e_a\ e_b) : e_c\ (d_i\ d_k\ e_a\ e_b) = X\ (E_i\ E_k\ D_a\ D_b) \qquad (1\,d.)$$
$$d_i\ (e_a\ e_b\ e_c\ d_k) = E_l\ (D_a\ D_b\ D_c\ E_i) \qquad (2\,a.)$$
$$e_a\ (d_i\ d_k\ d_l\ e_b) = D_b\ (E_i\ E_k\ E_I\ D_c) \qquad (2\,b.)$$
$$e_a\ (d_k\ d_l\ e_b\ e_c)\ .\ E_i\ (E_k\ E_l\ D_b\ D_c) = 1 \qquad (2\,c.)$$
$$d_i\ (e_a\ e_b\ d_k\ d_l) = E_k\ (D_a\ D_b\ D_c\ E_i) : E_l\ (D_a\ D_b\ D_c\ E_i) \qquad (2\,d.)$$
$$e_b\ (d_i\ d_k\ d_l\ e_a) : e_c\ (d_i\ d_k\ d_l\ e_a) = D_a\ (E_i\ E_k\ D_b\ D_c) \qquad (2\,e.)$$

(Die geometrische Interpretation der Gleichungen (1) führt auf Resultate, welche in der Tabelle auf Seite 21 enthalten sind.)

Um nun die zwischen den Gleichungen (2) bestehenden Relationen zu ermitteln, gehe ich von (2c), welches ich zur Abkürzung durch (a i) = 1 andeute, aus. Die Zweideutigkeit, welche dieser Bezeichnung anhaftet, lässt sich durch die keine wesentliche Beschränkung involvierende Bestimmung beseitigen, dass a b c und i k l nur durch cyclische Vertauschung von 1 2 3 verschieden sein sollen. Mit Hilfe der Identitäten (α) und (γ) ergiebt sich alsdann unmittelbar

$$(a\,i)\ (a\,k)\ (a\,l) = 1 \qquad (a\,i)\ (b\,i)\ (c\,i) = 1$$

Hieraus folgt sofort, dass sich unter den Beziehungen (a i) = 1 nicht mehr als 4 unabhängige befinden können. Aus (1 1) = 1, (1 2) = 1, (2 1) = 1, (2 2) = 1 ergiebt sich z. B. (1 3) = 1, (2 3) = 1; (3 1) = 1, (3 2 = 1); (3 3) = 1. Dass die Anzahl der untereinander unabhängigen Gleichungen (2c) aber auch nicht geringer als 4 sein kann, erkennt man daraus, dass sich Punktsysteme construieren lassen, welche drei unabhängige dieser Gleichungen befriedigen, eine vierte jedoch nicht. Be-

stimmt man z. B. $d_1\ d_3$ nach willkürlicher Annahme von $e_1\ e_2\ e_3\ d_2$ so, dass $e_1\ (d_2\ d_3\ e_2\ e_3) = \pm 1$, $e_1\ (d_3\ d_1\ e_2\ e_3) = e_2\ (d_2\ d_3\ e_1\ e_3) = \mu$, also $e_2\ (d_2\ d_3\ e_3\ e_1) = 1 : \mu$ ist, und ist $e_2\ (d_3\ d_1\ e_3\ e_1) = \nu$, wo μ und ν irgend zwei gegebene Doppelverhältnisse sind, construiert man alsdann auf dieselbe Weise die Punkte $E_1\ E_2\ E_3\ D_2$, $D_1\ D_3$, so ist $(1, 1) = 1$, $(1\,2) = \mu$. $(1 : \mu) = 1$, $(2\,1) = (1 : \mu) \,.\, \mu = 1$, $(2\,2) = \nu\nu$. Man überzeugt sich leicht, dass die angegebene Construction für alle Werte von μ und ν möglich ist und im allgemeinen zu eindeutig bestimmten Punkten führt. Wählt man also ν von ± 1 verschieden, so erhält man zwei Punktsysteme der geforderten Art. Damit ist der Beweis geliefert, dass die 9 Gleichungen (2c) vier von einander unabhängige Beziehungen ausdrücken.

Die Relationen (2a) und (2b) ergeben sich als blosse Folgerungen der (2c). Ich gehe aus von $(b\,l) = 1$, $(a\,l) = 1$, d. h.

$$e_b\ (d_i\ d_k\ e_c\ e_a) = E_l\,(D_a\ D_c\ E_i\ E_k),$$
$$e_a\ (d_i\ d_k\ e_b\ e_c) = E_l\ (D_b\ D_c\ E_k\ E_i)$$
$$\text{oder } e_b\ (d_k\ e_c\ d_i\ e_a) = E_l\ (E_i\ D_c\ E_k\ D_a),$$
$$e_a\ (d_k\ e_c\ d_i\ e_b) = E_l\ (E_i\ D_c\ E_k\ D_b)$$

Die Division der ersten Gleichung durch die zweite ergiebt

$$e_b\,(d_k\ e_c\ d_i\ e_a) : e_a\ (d_k\ e_c\ d_i\ e_b) = E_l\,(E_i\ D_c\ E_k\ D_a) : E_l\,(E_i\ D_c\ E_k\ D_b)$$

d. i. mit Rücksicht auf die Identitäten (α) und (γ):

$$d_i\ (d_k\ e_c\ e_b\ e_a) = E_l\ (E_i\ D_c\ D_b\ D_a)$$
$$\text{oder } d_i\ (e_a\ e_b\ e_c\ d_k) = E_l\ (D_a\ D_b\ D_c\ E_i)$$

Dies sind in der That die Gleichungen (2a), und es ist klar, dass die mit (2b) bezeichneten in gleicher Weise abgeleitet werden können. Aus diesen folgen alsdann, wie früher, die Relationen (2d) und (2e).

Hiermit ist bewiesen, dass die Gleichungen (2) vier unabhängige Beziehungen zwischen den Hauptsystemen der Transformation darstellen. Und man erkennt leicht, dass andere als diese nicht existieren können. Gäbe es nämlich noch irgend eine unter den Gleichungen (2) nicht vorhandene und von diesen unabhängige Beziehung, so könnte man dieselbe, da sie notwendig projectiv sein müsste, als eine Relation zwischen Doppelverhältnissen darstellen. Mit Hilfe der Gleichungen (2)

würden sich alsdann alle auf die eine Ebene bezüglichen Doppelverhältnisse eliminieren lassen, wodurch eine nur die Hauptpunkte der andern Ebene enthaltende Relation entstände; eine solche existiert aber nicht, da ein einzelnes Hauptsystem ganz willkürlich angenommen werden kann. Mithin ist jede unter den Gleichungen (2) nicht enthaltene Beziehung eine Folgerung aus denselben.

Was die Gleichungen (1) betrifft, so ist es klar, dass aus zweien in Verbindung mit den Relationen (2) die übrigen identisch folgen müssen; denn die beiden gewählten definieren, wofern die Gleichungen (2) erfüllt sind, eine biquadratische Transformation, deren Hauptsysteme d, e; D, E sind, und aus deren Eigenschaften alsdann, dem früheren zufolge, alle unter (1) zusammengefassten Beziehungen hervorgehen. Man kann dies natürlich auch durch wirkliche Entwicklung der zwischen denselben bestehenden Identitäten nachweisen. Da indessen die Form der letzteren für das Folgende ohne Wichtigkeit ist, so will ich die mit keinen wesentlichen Schwierigkeiten verknüpfte, aber einigermassen umständliche Entwicklung übergehen.

Als Endresultat dieser Betrachtungen ergeben sich somit folgende Sätze:

Die Hauptsysteme einer jeden Cremona'schen Transformation 4. Ordnung sind durch die in den Gleichungen (2) ausgedrückten projectiven Beziehungen verbunden. Aus diesen können auf mannigfaltige Art 4 unabhängige gewählt werden, als deren Folge alle übrigen erscheinen.

Nimmt man umgekehrt zwei Systeme von je 6 Punkten an, welche irgend 4 unabhängige unter den Gleichungen (2) befriedigen, so giebt es eine Cremona'sche Transformation 4. Ordnung, deren Hauptsysteme sie sind. Dieselbe wird durch irgend zwei der Gleichungen (1) definiert.

§ 3.

An die vorangehende allgemeine Untersuchung schliesst sich naturgemäss die Betrachtung der wichtigsten Fälle an, in denen die Fundamentalpunkte der einen Ebene und infolge dessen auch diejenigen der andern specielle Lagen besitzen.

Die Fälle, in denen eine wirkliche Ausartung der Transformation eintritt, werde ich jedoch ausser Acht lassen, da eine vollständige Erörterung derselben den mir zu Gebote stehenden Raum weit überschreiten würde.

In gewissem Sinne gehört hierher auch die Frage nach der Realität der Hauptpunkte, die ich zunächst erledigen will. Soweit die letzteren überhaupt willkürlich sind, dürfen sie natürlich auch beliebig reell oder imaginär gewählt werden. Anders verhält es sich, wenn man verlangt, dass die Transformation jedem reellen Punkte einer Ebene einen ebenfalls reellen Punkt der andern zuordnen soll. Eine solche Transformation, die wohl am passendsten als eine reelle bezeichnet werden kann, ist natürlich von hervorragendem, ja, wenigstens für die geometrische Auffassung, von fast ausschliesslichem Interesse.

Wenn jedem reellen Punkt einer Ebene ein ebensolcher in der andern entspricht, so wird auch jede reelle Gerade in eine reelle Curve 4. Ordnung transformiert. Da nun eine Curve, welche einen pfachen imaginären Punkt enthält, nur dann reell sein kann, wenn sie auch durch dessen conjugierten Punkt pmal hindurchgeht, so folgt, dass in jeder Ebene alle drei Doppelpunkte reell sind, oder dass es nur einer ist, während die beiden andern conjugiert-imaginär sind; dieselbe Folgerung ergiebt sich für die Grundpunkte. Ist demnach z. B. d_1 reell, so sind d_2 und d_3 entweder ebenfalls reell oder aber conjugiert-imaginär; die Gerade $[d_2\ d_3]$ ist mithin in allen Fällen reell, und dasselbe gilt folglich von ihrem entsprechenden Punkte E_1. Umgekehrt erschliesst man aus der Realität von E_1 diejenige von $[d_2\ d_3]$ und somit auch von d_1. Es besteht demnach der Satz:

Ist der eine von zwei correspondierenden Fundamentalpunkten reell, so ist es auch der andere.

Dadurch ist zugleich der diesen ergänzende Satz bewiesen:

Sind zwei gleichartige Fundamentalpunkte conjugiert-imaginär, so sind es auch ihre correspondierenden.

[Man sieht ohne Schwierigkeit, dass diese Sätze für jede reelle Cremona'sche Transformation gelten, wenn der Begriff

der Correspondenz in der früher (S. 19) angedeuteten Weise ausgedehnt wird.]

Hiernach sind bei einer reellen biquadratischen Transformation folgende drei Fälle möglich:

1. *Sämtliche Fundamentalpunkte sind reell.*
2. *Zwei Doppelpunkte in der einen Ebene und ihre correspondierenden Grundpunkte in der andern bilden je ein conjugiert-imaginäres Paar. Die übrigen Hauptpunkte sind reell.*
3. *Ein Doppelpunkt und ein Grundpunkt der einen Ebene, sowie die ihnen in der andern correspondierenden sind reell. Die übrigen gleichartigen Fundamentalpunkte jeder Ebene sind conjugiert-imaginär.*

Hierzu treten noch einige Uebergangsfälle, in denen zwei gleichartige Fundamentalpunkte zusammenfallen. Es lässt sich von vornherein vermuten, dass alsdann deren correspondierende einander ebenfalls unendlich nahe liegen werden. Im allgemeinen Falle erweist sich diese Vermutung in der That als richtig. Man kann sich, um dies zu erkennen, auf die im § 2 abgeleiteten Beziehungen stützen, einfacher ist es indessen, die Zerlegung der Transformation in zwei quadratische anzuwenden. Ich schlage diesen Weg unter Beibehaltung der im § 1 festgesetzten Bezeichnung ein.

Wenn e_1 e_2 zusammenfallen, ohne dass ihnen ein anderer Hauptpunkt unendlich nahe liegt, so gilt dasselbe von den ihnen in III entsprechenden Punkten ε_1 ε_2. Von den Hauptpunkten der quadratischen Transformation (II III) fallen also zwei (ε_1 ε_2) zusammen, ihre correspondierenden D_1 D_2 sind einander demnach ebenfalls unendlich nahe, vorausgesetzt, dass die vorliegende Transformation eine eigentliche ist. (Vgl. Salmon-Fiedler Höh. cb. C. Art. 331.) Der umgekehrte Gedankengang ist offenbar ebenfalls richtig. Aus dem Zusammenfallen von e_1 e_2 folgt somit dasjenige von D_1 D_2 und umgekehrt. Die Lage der übrigen Hauptpunkte ist dabei, wofern nur die Transformation nicht degeneriert, allein der oben gemachten Einschränkung unterworfen. Auch diese fällt in einem speciellen Falle weg, nämlich dann, wenn unendlich nahe bei e_1 e_2 noch andere Hauptpunkte so liegen, dass ihre Ver-

bindungslinien mit e_1 e_2 unendlich kleine Winkel einschliessen. Haben z. B. e_1 e_2 e_3 eine derartige Lage, so gilt dasselbe von ε_1 ε_2 ε_3 und daher auch von D_1 D_2 D_3. (Vgl. Salmon-Fiedler a. a. O.) (Würden dagegen e_1 e_2 e_3 und daher auch ε_1 ε_2 ε_3 ein unendlich kleines Dreieck mit endlichen Winkeln bilden, so wäre die Transformation (II III) eine ausgeartete.) Liegen andererseits e_1 e_2 d_1 in der angedeuteten Art, so fallen ε_1 und ε_2 und mithin auch D_1 D_2 wie im allgemeinen Falle zusammen. (Wären dagegen die Winkel des unendlich kleinen Dreiecks e_1 e_2 d_1 endlich, so würden ε_1 ε_2 zwei getrennte Punkte der Geraden δ_2 δ_3 sein.)

Ich fasse das Resultat in dem folgenden Satze zusammen:

Fallen zwei gleichartige Hauptpunkte einer nicht ausgearteten Transformation 4. Ordnung zusammen, so gilt dasselbe von ihren correspondierenden, vorausgesetzt, dass der Abstand der ersteren von jedem andern Hauptpunkte ihrer Ebene aus gesehen unter einem unendlich kleinen Winkel erscheint.

Durch ähnliche Betrachtungen, die ich nicht ausführen will, ergeben sich die beiden folgenden Sätze:

Wenn ein Grundpunkt und ein Doppelpunkt einander unendlich nahe liegen, so geht unter denselben Bedingungen wie im vorigen Satze die Gerade, welche die dem letzteren nicht correspondierenden Grundpunkte verbindet, durch den dem ersteren correspondierenden Doppelpunkt.

Bilden zwei Grundpunkte und ein Doppelpunkt ein unendlich kleines Dreieck mit endlichen Winkeln, so gilt dasselbe im allgemeinen von den ihnen nicht correspondierenden drei Hauptpunkten.

(In Betreff der Formen, welche die Curven 4. Ordnung bei diesen speciellen Lagen der sie bestimmenden Punkte annehmen, vergleiche man die Abhandlung von Brill: „Ueber rationale Curven vierter Ordnung.“ Math. Ann. XII 90.)

In den vorstehend behandelten Fällen werden von den die Transformation definierenden Beziehungen (1) einige identisch erfüllt. Sind z. B. e_1 e_2 und d_1 d_2, mithin auch D_1 D_2 und E_1 E_2 zusammenfallende Punktepaare, so werden alle Gleichungen bis auf die eine

$$x\,(e_1\ e_3\ d_1\ d_3) = e_2\,(e_1\ e_3\ d_1\ d_3).\ X\,(E_1\ E_3\ D_1\ D_3)$$

zu identischen. Es scheint also die Transformation in diesem Falle unbestimmt zu sein, indem der einem beliebigen Punkte entsprechende nur auf einen Kegelschnitt beschränkt ist. Jedoch ist dies nur scheinbar. Infolge des Umstandes nämlich, dass die Verbindungslinie zweier zusammenfallenden Hauptpunkte nicht aufhört, eine bestimmte Richtung zu besitzen, geben die anscheinend identisch werdenden Beziehungen doch zu bestimmten Relationen Anlass. Eine nähere Betrachtung derselben zeigt, dass sie nur unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen identisch werden. Unter Berücksichtigung der letzteren erlangt man dagegen Bestimmungsgleichungen der Transformation. In dem soeben angeführten Fall nimmt z. B. die Gleichung

$$d_1\ (e_1\ e_2\ e_3\ x) = X\ (D_1\ D_2\ D_3\ E_1)$$

die Gestalt $1 = 1$ an, wenn e_1 mit e_2, D_1 mit D_2 zusammenfällt. Nimmt man indessen auf den Geraden $[e_1\ e_2]$, $[D_1\ D_2]$ zwei Punkte e und D in endlicher Entfernung von e_1 und D_1 an, so kann man $e_2 = e_1 + \varepsilon\, e$, $D_2 = D_1 + \Delta\, D$ setzen, wobei ε und Δ unendlich kleine Grössen bezeichnen. Mit Hilfe der leicht zu beweisenden Identität

$$p\ (q\ r\ s\ t) = 1 - \varepsilon\, p\ (q\ s\ r\ u)\ \frac{(p\ q\ u)}{(p\ q\ s)}, \quad (t = s + \varepsilon\, u)$$

verwandelt sich alsdann obige Gleichung in folgende:

$$1 - \varepsilon\, d_1\ (e_3\ e_1\ x\ e)\ \frac{(d_1\ e_3\ e)}{(d_1\ e_3\ e_1)} = 1 - \Delta\ X\ (D_3\ D_1\ E_1\ D)\frac{(X\ D_3\ D)}{(X\ D_3\ D_1)}$$

Mit Hilfe der analogen aus

$$d_1\ (e_1\ e_2\ e_3\ d_3) = E_2\ (D_1\ D_2\ D_3\ E_1)$$

fliessenden Relation

$$1 - \varepsilon\, d_1\ (e_3\ e_1\ d_3\ e)\ \frac{(d_1\ e_3\ e)}{(d_1\ e_3\ e_1)} = 1 - \Delta\, E_2\ (D_3\ D_1\ E_1\ D)\ \frac{(E_2\ D_3\ D)}{(E_2\ D_3\ D_1)}$$

kann man die unendlich kleinen Grössen ε und Δ eliminieren. Nach einigen Umformungen erhält man so die Gleichung

$$d_1\ (e_1\ e_3\ d_3\ x) = E_1\ (D_1\ D_3\ E_2\ X)\ .\ D_1\ (D_2\ D_3\ X\ E_2)$$

Dieselbe bestimmt in Verbindung mit der schon angegebenen

$$x\ (e_1\ e_3\ d_1\ d_3) = e_2\ (e_1\ e_3\ d_1\ d_3)\ .\ X\ (E_1\ E_3\ D_1\ D_3)$$

die zwischen x und X bestehende Beziehung.

Es ist augenscheinlich, dass auch in allen übrigen Fällen, in denen durch Zusammenfallen von Fundamentalpunkten eine scheinbare Unbestimmtheit eintritt, dieselbe auf ähnliche Art beseitigt werden kann.

In dem soeben ausführlich behandelten Beispiele (und ähnlich in jedem andern, in dem eine einzige Gleichung nicht unbestimmt wird), würde übrigens die Bemerkung genügen, dass die einander zugeordneten Kegelschnitte Träger projectivischer Punktreihen sind, deren Beziehung durch eine genügende Anzahl entsprechender Punkte festgelegt ist. (Vergleiche S. 21.)

§ 4.

In allen bisher aufgezählten speciellen Fällen nimmt die Transformation keine wesentlichen Eigentümlichkeiten an, sie bleibt unter Benutzung einer früher definierten Bezeichnung eine eigentliche biquadratische Transformation. Tiefer eingreifend sind die Specialisierungen, welche auf reducierte Transformationen führen, wie ich diejenigen bezeichnet habe, bei denen sämtliche Curven des durch die Fundamentalpunkte bestimmten Netzes zerfallen und einen gemeinsamen Bestandteil enthalten. Im Falle der biquadratischen Verwandtschaft sind, abgesehen von Ausartungsformen, nur folgende Möglichkeiten vorhanden:

A) 1. Ein Grundpunkt liegt auf einer Fundamentalgeraden, d. h. ein Grundpunkt und zwei Doppelpunkte sind auf einer Geraden gelegen.

2. Zwei Grundpunkte liegen auf je einer Fundamentalgeraden.

3. Drei Grundpunkte liegen auf je einer Fundamentalgeraden.

B) Die drei Doppelpunkte liegen auf einer Geraden.

C) Die sechs Hauptpunkte liegen auf einem Kegelschnitt.

Im Falle A) 1 reduciert sich die Transformation auf eine solche der dritten Ordnung, da die durch einen Grundpunkt gehende Fundamentalgerade mit jeder Curve 4. Ordnung des Netzes 5 Punkte gemein hat, ihr also vollständig angehören

muss. Ich will diesen Fall etwas ausführlicher behandeln, da er gestattet, die wesentlichen Eigenschaften der Transformation 3. Ordnung abzuleiten.

Ich nenne die drei auf einer Geraden G gelegenen Hauptpunkte D_1 D_2 E_3. Jeder Geraden der Ebene I entspricht alsdann eine Curve 4. Ordnung in der Ebene II, welche die Gerade G enthält. Der andere variable Teil ist somit eine Curve der 3. Ordnung, welche durch D_1 D_2 E_1 E_2 geht und in D_3 einen Doppelpunkt hat.

Aus der infolge unserer Voraussetzung geltenden Gleichung

$$E_3\ (D_2\ D_3\ E_2\ E_1) = E_3\ (D_1\ D_3\ E_2\ E_1)$$

ergiebt sich nun nach (2 c):

$$e_1\ (e_2\ e_3\ d_1\ d_2) = e_2\ (e_1\ e_3\ d_1\ d_2)$$

Die beiden hierdurch auf einander bezogenen Strahlbüschel sind offenbar perspectivisch, ihr durch e_3 d_1 d_2 gehender Durchschnitt ist mithin eine gerade Linie. Demnach zerfallen auch in der Ebene I sämtliche Curven 4. Ordnung; ihre Bestandteile sind die Gerade $g = [e_3\ d_1\ d_2]$ und die durch d_1 d_2 e_1 e_2 gehenden Curven 3. Ordnung, welche d_3 als Doppelpunkt enthalten.

Sieht man also von den Geraden g und G ab, so sind die beiden Ebenen I und II durch eine Transformation der 3. Ordnung verbunden. Die Beziehungen, welche zwischen den Fundamentalpunktsystemen derselben bestehen, müssen sich durch Einführung der Annahme, dass D_1 D_2 E_3 auf einer Geraden liegen, aus denjenigen Relationen ableiten lassen, welche für jede, also auch für diese specielle biquadratische Transformation gelten. Es ist

$$E_1\ (D_1\ D_2\ D_3\ E_2) = d_2\ (e_1\ e_2\ e_3\ d_3)$$
$$E_2\ (D_1\ D_2\ D_3\ E_1) = d_1\ (e_1\ e_2\ e_3\ d_3)$$

Da auf dem Strahl $[d_1\ d_2]$ auch e_3 liegt, so kann ich ihn für $[d_1\ e_3]$ und $[d_2\ e_3]$ substituieren und erhalte so

$$E_1\ (D_1\ D_2\ D_3\ E_2) = d_2\ (e_2\ e_1\ d_3\ d_1)$$
$$E_2\ (D_1\ D_2\ D_3\ E_1) = d_1\ (e_2\ e_1\ d_3\ d_2)$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Gruppe der 5 Punkte d_1 d_2 d_3 e_1 e_2 zu E_2 E_1 D_3 D_2 D_1 collinear ist. Dieses Resultat lässt sich noch etwas anders aussprechen. Dem Punkte d_1 entspricht, wenn man die Transformation zunächst als eine specielle biquadratische ansieht, der Kegelschnitt

$[E_2\ E_3\ D_1\ D_2\ D_3]$; derselbe zerfällt in die Geraden $[D_3\ E_2]$ und $[E_3\ D_1\ D_2] = G$. Bei der Auffassung der Transformation als einer kubischen ist letztere fortzulassen, so dass d_1 nur noch $[D_3\ E_2]$ als zugehörige Fundamentalgerade besitzt. Dasselbe gilt von d_2 und $[D_3\ E_1]$; von e_1 und $[D_3\ D_2]$, e_2 und $[D_3\ D_1]$ ist es unmittelbar ersichtlich. Die hieraus entspringende Zuordnung der einfachen Hauptpunkte ($d_1\ E_2$, $d_2\ E_1$, $e_1\ D_2$, $e_2\ D_1$) enthält die charakteristischen Merkmale derjenigen Beziehung, welche ich allgemein als Correspondenz bezeichnet habe (S. 19). In demselben Sinne sind auch die Doppelpunkte d_3 und D_3 correspondierend. Vergleicht man nun diese Zuordnung mit der oben angegebenen, welche durch die collineare Beziehung vermittelt ist, so erhält man den Satz:

Die Systeme der Fundamentalpunkte zweier Ebenen, zwischen denen eine Cremona'sche Transformation 3. Ordnung besteht, sind collinear aufeinander bezogen, der Art, dass einem jedem sein correspondierender entspricht.

Insbesondere folgt hieraus die Gleichheit der Doppelverhältnisse der Strahlbüschel, welche in beiden Ebenen aus den Doppelpunkten nach den einfachen Fundamentalpunkten gehen. (Vgl. Maschke a. a. O. S. 14. Dort findet sich auch die hier als Correspondenz bezeichnete Zuordnung.)

Auch die projectivischen Beziehungen, welche entsprechende Punkte x X einer Transformation 3. Ordnung verbinden, können leicht aus denjenigen, welche bei der biquadratischen Verwandtschaft gelten, abgeleitet werden. Es ist z. B.

$$x\ (d_1\ d_2\ d_3\ e_1) = D_1\ (E_1\ E_2\ E_3\ X)$$

oder

$$x\ (d_1\ d_2\ e_1\ d_3) = D_1\ (E_2\ E_1\ D_2\ X)$$

d. h.: *Eine durch einen einfachen Hauptpunkt, z. B.* D_1, *gehende Gerade* $[D_1\ X]$ *wird in einen Kegelschnitt transformiert, welcher die jenem nicht correspondierenden Hauptpunkte* $d_1\ d_2\ e_1\ d_3$ *enthält.* Es ist ferner:

$$x\ (d_1\ d_2\ e_1\ e_2) = e_3\ (d_1\ d_2\ e_1\ e_2)\ .\ X\ (D_1\ D_2\ E_1\ E_2)$$

also, da im vorliegenden Falle $e_3\ (d_1\ d_2\ e_1\ e_2) = 1$ ist,

$$x\ (d_1\ d_2\ e_1\ e_2) = X\ (E_2\ E_1\ D_2\ D_1)$$

d. h.: *Ein Kegelschnitt durch die vier einfachen Fundamentalpunkte der einen Ebene geht in einen Kegelschnitt durch die correspondierenden Hauptpunkte über.*

Endlich ist

$$x\ (d_1\ d_2\ d_3\ e_3) = D_3\ (E_1\ E_2\ E_3\ X)$$
$$e_2\ (d_1\ d_2\ d_3\ e_3) = D_3\ (E_1\ E_2\ E_3\ D_1)$$

Daraus folgt mit Hilfe der Identitäten $\alpha\ \beta$ (S. 24) und weil $e_3\ (d_1\ d_2\ x\ e_2) = 1$ ist:

$$d_3\ (d_1\ d_2\ x\ e_2) = D_3\ (E_1\ E_2\ D_1\ X)$$

oder $$d_3\ (d_1\ d_2\ e_2\ x) = D_3\ (E_2\ E_1\ D_1\ X)$$

d. h.: *Jeder Geraden durch den Doppelpunkt einer Ebene entspricht eine Gerade durch den Doppelpunkt der andern Ebene.*

Die erhaltenen Relationen drücken zugleich die projectivische Beziehung der Büschel aus, welche von den als entsprechend erkannten Gebilden (Geraden oder Kegelschnitten) beschrieben werden.

In allen diesen Entwicklungen erscheint als einzige Bedingung die, dass E_3 auf $[D_1\ D_2]$ liege; es bleibt ohne Einfluss, welche specielle Lage E_3 auf dieser Geraden hat. Dies steht damit im Einklang, dass eigentlich jeder auf G gelegene Punkt als Grundpunkt anzusehen ist, sofern die Transformation nicht als eine kubische, sondern als eine biquadratische von speciellem Charakter aufgefasst wird. In der That besitzen sämtliche Punkte von G die charakteristische Eigenschaft der Grundpunkte, einfache gemeinschaftliche Punkte sämtlicher Curven des Netzes 4. Ordnung zu sein. Ihnen allen correspondierend ist d_3. Dieselben Bemerkungen gelten natürlich unter Vertauschung der grossen mit den kleinen Buchstaben, d. h. wenn beide Ebenen miteinander vertauscht werden.

Die hier benutzte Methode, die Cremona'sche Transformation 3. Ordnung aus derjenigen 4. Ordnung durch Specialisierung derselben abzuleiten, stimmt ihrem Wesen nach mit dem Verfahren überein, nach welchem man die kubische Verwandtschaft durch eine Combination zweier quadratischen herstellt, welche in der Zwischenebene einen Hauptpunkt gemein haben. Unter Festhaltung der im § 1 benutzten Bezeichnung tritt der soeben ausführlich behandelte Fall ein, wenn δ_3 und ε_3 identisch sind. Daraus ergiebt sich zugleich, dass jede Transformation der 3. Ordnung durch die im Vorstehenden behandelte Specialisierung einer biquadratischen erhalten werden kann, dass also auch die gefundenen Relationen allgemein gelten.

Was die noch weiter specialisierten Fälle A) 2 und A) 3 anbetrifft, so ist es klar, dass in ihnen die Transformation sich auf eine solche der 2. resp. der 1. Ordnung reduciert. Da hierbei keine anderen Gesichtspunkte wie im vorigen Falle in Betracht kommen, so kann ein Eingehen auf Einzelheiten unterbleiben.

Ich wende mich zur Betrachtung des Falles B), indem ich annehme, dass $D_1\ D_2\ D_3$ auf einer Geraden L liegen. In der Gleichung

$$e_l\ (d_1\ d_2\ d_3\ e_i) = D_i\ (E_1\ E_2\ E_3\ D_k)$$

bleibt unter dieser Voraussetzung die rechte Seite ungeändert, wenn k mit l vertauscht wird. Da die linke Seite dabei in $e_k\ (d_1\ d_2\ d_3\ e_i)$ übergeht, so folgt

$$e_l\ (d_1\ d_2\ d_3\ e_i) = e_k\ (d_1\ d_2\ d_3\ e_i)$$

Die Fundamentalpunkte der Ebene I liegen somit auf einem Kegelschnitt. Und umgekehrt: ist letzteres der Fall, so hat man unter anderen Beziehungen

$$d_1\ (e_1\ e_2\ e_3\ d_3) = d_2\ (e_1\ e_2\ e_3\ d_3)$$

also
$$E_2\ (D_1\ D_2\ D_3\ E_1) = E_1\ (D_1\ D_2\ D_3\ E_2)$$

Der Strahl $[E_1\ E_2]$ ist den beiden projectivischen Büscheln E_1, E_2 hiernach entsprechend gemein, diese liegen mithin perspectivisch, d. h. $D_1\ D_2\ D_3$ sind auf einer Geraden gelegen. Das Resultat dieser Betrachtung ist demnach:

Liegen die Doppelpunkte der einen Ebene auf einer Geraden, so geht durch sämtliche Fundamentalpunkte der andern Ebene ein Kegelschnitt und umgekehrt.

Die Fälle B) und C) treten demnach stets gleichzeitig auf und führen beide auf die gleiche specielle Transformation 4. Ordnung. Es ist evident, dass sich dieselbe auf eine quadratische mit den Hauptpunkten $d_1\ d_2\ d_3$ in I, $E_1\ E_2\ E_3$ in II reduciert, indem alle Curven 4. Ordnung den Kegelschnitt $K = [d_1\ d_2\ d_3\ e_1\ e_2\ e_3]$ resp. die doppelt zu zählende Gerade $L = [D_1\ D_2\ D_3]$ enthalten. Dasselbe ergiebt sich, wenn die für die biquadratische Verwandtschaft geltenden Relationen auf den vorliegenden Fall angewendet werden. Es ist allgemein

$$d_i\ (e_1\ e_2\ e_3\ x) = X\ (D_1\ D_2\ D_3\ E_i)$$

also, da hier speciell $D_3\ (D_1\ D_2\ E_i\ X) = 1$ und somit

$$X(D_1\ D_2\ D_3\ E_i) - X(D_1\ D_2\ D_3\ E_i)\ .\ D_3(D_1 D_2 E_i\ X) = E_i(D_1\ D_2\ D_3 X)$$

ist $\quad d_i\ (e_1\ e_2\ e_3\ x) = E_i\ (D_1\ D_2\ D_3\ X) \quad (i = 1, 2, 3)$

Durch diese Gleichungen ist die quadratische Transformation fixiert; man erkennt aus ihnen unmittelbar, dass $e_1 D_1$, $e_2 D_2$, $e_3 D_3$ zugeordnete Punkte, also K und L entsprechende Gebilde sind.

Fasst man die Transformation nicht als quadratische, sondern als eine specielle biquadratische auf, so sind alle Punkte auf K als Grundpunkte, alle auf L als Doppelpunkte anzusehen. Dabei kann auch der Begriff der Correspondenz festgehalten werden. Bezeichnet man nämlich einen Punkt e auf K und den ihm auf L vermöge der quadratischen Verwandtschaft entsprechenden D als correspondierend, so überzeugt man sich leicht, dass ihnen dieselben Eigenschaften zukommen, welche die correspondierenden Hauptpunktepaare charakterisieren. (S. 20.) So entspricht z. B. jedem Strahl durch D ein Kegelschnitt durch e und die Doppelpunkte $d_1\ d_2\ d_3$.

§ 5.

Ich wende mich zu der eigentlichen Aufgabe, der Festlegung der Transformation, und zwar betrachte ich zunächst diejenigen Fälle, in denen sämtliche Daten aus Hauptpunkten bestehen. Da die Transformation eindeutig bestimmt ist, sobald die Hauptsysteme beider Ebenen bekannt sind, so kann ich die vorliegende Frage folgendermassen formulieren: welche Fundamentalpunkte dürfen beliebig angenommen werden und bestimmen, wenn sie gegeben sind, die übrigen? Die Antwort hierauf ergiebt sich ohne Schwierigkeit aus den früher entwickelten Beziehungen:

$$\begin{aligned}
d_i\ (e_1\ e_2\ e_3\ d_k) &= E_1\ (D_1\ D_2\ D_3\ E_i) && \text{(a.)}\\
e_a\ (d_1\ d_2\ d_3\ e_b) &= D_b\ (E_1\ E_2\ E_3\ D_c) && \text{(b.)}\\
e_a\ (d_k\ d_1\ e_b\ e_c) &= E_i\ (D_b\ D_c\ E_1\ E_k) && \text{(c.)}\\
d_i\ (d_k\ d_1\ e_a\ e_b) &= E_k\ (D_a\ D_b\ D_c\ E_i) : E_1\ (D_a\ D_b\ D_c\ E_i) && \text{(d.)}
\end{aligned}$$

Von diesen Bedingungen, welche sich auch als Gleichungen zwischen den Verhältnissen der Coordinaten aller zwölf

Hauptpunkte darstellen lassen, sind nur 4 untereinander unabhängig (§ 2). Es können daher 20 von diesen 24 Verhältnissen beliebg angenommen werden, aus ihnen müssen alsdann die übrigen folgen. Es ist ersichtlich, dass sich dieses Resultat unter den allgemeinen Satz unterordnet, nach welchem die Verwandtschaft 4. Ordnung durch 20 einfache Daten festgelegt ist.

Demgemäss ist die Transformation durch die Angabe von 10 Fundamentalpunkten bestimmt, falls dieselben willkürlich gewählt werden dürfen. Dass nicht irgend 10 von ihnen beliebig anzunehmen sind, zeigen die obigen Gleichungen (a) (b) (c). Es besteht diesen zufolge eine projectivische Beziehung

1) zwischen sämtlichen Hauptpunkten mit Ausnahme eines Doppelpunktes und eines ihm nicht correspondierenden Grundpunktes (nach (a) und (b).)

2) zwischen sämtlichen Hauptpunkten mit Ausnahme eines Doppelpunktes in jeder Ebene (nach (c).)

Andere Beziehungen als diese können nur zwischen mehr als 10 Fundamentalpunkten stattfinden. Da nämlich nur projective Beziehungen in Betracht kommen, in deren jeder mindestens 5 Punkte jeder Ebene auftreten müssen,[14]) so ist zunächst klar, dass 9 Hauptpunkte stets vollkommen willkürlich sind, und ferner, dass 10 Fundamentalpunkte nur dann von einander abhängig sein können, wenn sie zur Hälfte der einen, zur Hälfte der andern Ebene angehören. In diesem Falle existieren aber, wie früher ausführlich nachgewiesen wurde (S. 26), keine andern, als die Beziehungen (a) (b) (c).

Somit dürfen

1. Sämtliche Fundamentalpunkte einer Ebene und irgend vier der andern,

2. Fünf correspondierende Fundamentalpunktepaare,

3. Sämtliche Fundamentalpunkte mit Ausnahme eines Grundpunktes in jeder Ebene

---

[14]) Eine Ausnahme tritt dann ein, wenn zwischen weniger als 5 Punkten eine invariante Beziehung besteht, wenn also entweder 3 auf einer Geraden oder 2 einander unendlich benachbart liegen. Diese Fälle können hier ausser Acht gelassen werden, da sie schon in den vorigen Paragraphen näher betrachtet worden sind.

vollständig beliebig gewählt werden. Geschieht dies, so ist die Transformation in jedem dieser Fälle gerade (und zwar eindeutig) bestimmt. Ich will dies verificieren, indem ich kurz die Beziehungen aufstelle, durch welche in jedem Falle die beiden anderen, nicht gegebenen Hauptpunkte bestimmt sind:

a) Alle Hauptpunkte ausser E_2 und E_3 seien gegeben. Man findet E_i durch

$$\begin{aligned} E_1\,(D_1\,D_2\,D_3\,E_i) &= d_i\,(e_1\,e_2\,e_3\,d_k) \\ E_i\,(D_1\,D_2\,D_3\,E_1) &= d_1\,(e_1\,e_2\,e_3\,d_k) \end{aligned} \qquad [i, k = 2, 3]$$

d. h. als zweiten Schnittpunkt einer durch E_1 gehenden Geraden und eines durch $E_1\ D_1\ D_2\ D_3$ gehenden Kegelschnitts. Auch in den folgenden Fällen ergiebt sich jeder unbekannte Punkt als letzter Schnittpunkt von Geraden oder Kegelschnitten, deren übrige gemeinsame Punkte bekannt sind. Ich beschränke mich deshalb auf die Angabe der zu benutzenden projectiven Beziehungen.

b) Sind D_3 und E_3 unbekannt, so ergiebt sich D_3 durch

$$E_i\,(D_1\,D_2\,D_3\,E_k) = d_k\,(e_1\,e_2\,e_3\,d_3) \qquad [i, k = 1, 2]$$

und E_3 entweder wie im Falle (a) oder einfacher durch

$$E_i\,(D_1\,D_2\,D_3\,E_3) = d_3\,(e_1\,e_2\,e_3\,d_k) \qquad [i, k = 1, 2]$$

c) Sind D_1 und D_2 unbekannt, so findet man D_i durch

$$\begin{aligned} D_i\,(E_1\,E_2\,E_3\,D_3) &= e_k\,(d_1\,d_2\,d_3\,e_i) \\ D_3\,(E_1\,E_2\,E_3\,D_i) &= e_k\,(d_1\,d_2\,d_3\,e_3) \end{aligned} \qquad [i, k = 1, 2]$$

d) Sind die correspondierenden Fundamentalpunkte $e_3\ D_3$ unbekannt, so findet man zunächst D_3 vermittelst

$$D_i\,(E_1\,E_2\,E_3\,D_3) = e_k\,(d_1\,d_2\,d_3\,e_i) \qquad [i, k = 1, 2]$$

und alsdann e_3 durch

$$e_i\,(d_1\,d_2\,d_3\,e_3) = D_3\,(E_1\,E_2\,E_3\,D_k) \qquad [i, k = 1, 2]$$

e) Sind endlich zwei in verschiedenen Ebenen gelegene Grundpunkte e_3 und E_3 unbekannt, so ist e_3 durch

$$d_i\,(e_1\ e_2\ e_3\ d_3) = E_k\,(D_1\,D_2\,D_3\,E_i) \qquad [i, k = 1, 2]$$

und in analoger Weise E_3 durch

$$e_k\,(d_1\ d_2\ d_3\ e_i) = D_i\,(E_1\,E_2\,E_3\,D_3) \qquad [i, k = 1, 2]$$

bestimmt.

Ich fasse diese Ergebnisse in dem Satze zusammen:

Die biquadratische Transformation wird durch die Angabe von irgend 10 unabhängigen Fundamentalpunkten eindeutig festgelegt.

Hierbei ist stillschweigend die auch weiterhin stets festgehaltene Voraussetzung gemacht, dass die Correspondenz der gegebenen Hauptpunkte eine bekannte sei. Indessen liegt hierin keine wesentliche Beschränkung, da man bei unbestimmt gelassener Correspondenz dieselbe nacheinander auf alle möglichen Arten anzunehmen hat. Man erhält dadurch soviel getrennte Fälle, als derartige Zuordnungen möglich sind; in einem jeden derselben ist die Correspondenz vollständig bestimmt.

Eine Ausnahme, wenigstens insoweit es sich um die wirkliche Ausführung der Constructionen handelt, tritt indessen dann ein, wenn zwei conjugiert-imaginäre Paare correspondierender Hauptpunkte gegeben sind. Werden dieselben, etwa $e_1\ e_2$ und $D_1\ D_2$, als Ordnungselemente je einer elliptischen Punktinvolution definiert (und darauf lassen sich ja alle Bestimmungsarten zurückführen), so können allerdings die beiden möglichen Zuordnungen $e_1\ D_1$, $e_2\ D_2$ und $e_1\ D_2$, $e_2\ D_1$ auch geometrisch (durch Berücksichtigung des Sinnes der Punktreihen $[e_1\ e_2]$ und $[D_1\ D_2]$) unterschieden werden. In den auszuführenden Constructionen lassen sich dagegen diese beiden Möglichkeiten nicht trennen, so lange man nur lineare Operationen benutzt. Ich gehe auf diesen Punkt nicht weiter ein, da die dabei in Betracht kommenden Fragen bereits eine erschöpfende Untersuchung erfahren haben, auf welche ich verweisen kann.[15])

Ich habe nun noch die Fälle zu untersuchen, in denen nur 9 der gegebenen Hauptpunkte willkürlich gewählt werden dürfen. Den allgemeinen Sätzen zufolge repräsentieren dieselben 18 einfache Daten; es müssen mithin noch 2 Fundamentalpunkte, die durch die ersten einer einfachen Beschränkung unterworfen sind, gegeben werden, ehe die Transformation festgelegt ist. Die verschiedenen Möglichkeiten gruppieren sich am übersichtlichsten nach dem Charakter des einzigen noch unbekannten Fundamentalpunktes.

Ist letzterer ein Grundpunkt, etwa E_3, so ist nur der folgende Fall möglich:

---

[15]) Smith. Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques. Annali di Matematica. Ser. II, T. III.

f) Die 9 Punkte $d_3\ e_1\ e_2\ e_3\ D_1\ D_2\ D_3\ E_1\ E_2$ sind beliebig angenommen und d_1 und d_2 alsdann den Bedingungen

$$d_i\ (e_1\ e_2\ e_3\ d_3) = E_k\ (D_1\ D_2\ D_3\ E_i) \qquad [i, k = 1, 2]$$

gemäss (d. h. auf zwei bestimmten Kegelschnitten) gewählt.

Dadurch ist auch E_3 bestimmt vermöge der Beziehungen:

$$d_3\ (e_1\ e_2\ e_3\ d_i) = E_k\ (D_1\ D_2\ D_3\ E_3) \qquad [i, k = 1, 2]$$

Die 12 Fundamentalpunkte sind mithin so bestimmt worden, dass sie die 4 soeben angegebenen, ersichtlich unabhängigen Bedingungen erfüllen. Da aus diesen alle übrigen folgen, so bilden die 12 Punkte in der That die Hauptsysteme einer biquadratischen Transformation. Dies gilt, wo auch d_1 und d_2 auf den ihnen durch die ersten 9 Punkte angewiesenen Orten gewählt werden mögen. Daraus geht hervor, dass durch die Annahme des einen abhängigen Hauptpunktes der andere noch nicht bestimmt wird, dass die Transformation also in der That erst festgelegt ist, wenn sowohl d_1 wie d_2 gegeben sind. Ganz ähnliche Betrachtungen, die ich deshalb nicht ausführen will, führen auch in den folgenden Fällen zu dem Resultat, dass die Transformation erst festgelegt ist, wenn ausser 9 unabhängigen noch zwei abhängige Fundamentalpunkte gegeben sind.

Falls der einzige unbekannte Hauptpunkt ein Doppelpunkt D_3 ist, liegen drei Möglichkeiten vor:

g) Es seien $d_1\ e_1\ e_2\ e_3\ D_1\ D_2\ E_1\ E_2\ E_3$ willkürlich und alsdann d_2 und d_3 je auf einer durch

$$e_3\ (d_1\ d_i\ e_1\ e_2) = E_k\ (D_2\ D_1\ E_1\ E_i) \qquad [i, k = 2, 3]$$

bestimmten Geraden gewählt.

Durch diese Daten ist D_3 als Schnittpunkt zweier Geraden

$$d_1\ (e_1\ e_2\ e_3\ d_i) = E_k\ (D_1\ D_2\ D_3\ E_1) \qquad [i, k = 2, 3]$$

definiert, und zwar eindeutig.

h) Es seien $d_1\ d_2\ d_3\ e_3\ D_1\ D_2\ E_1\ E_2\ E_3$ willkürlich, e_1 und e_2 je auf einer Geraden angenommen, gemäss den Bedingungen

$$e_3\ (d_1\ d_2\ d_3\ e_i) = D_i\ (E_1\ E_2\ E_3\ D_k) \qquad [i, k = 1, 2]$$

Alsdann ergiebt sich D_3 als vierter Schnittpunkt zweier durch $E_1\ E_2\ E_3$ gehender Kegelschnitte:

$$e_i\ (d_1\ d_2\ d_3\ e_3) = D_3\ (E_1\ E_2\ E_3\ D_k) \qquad [i, k = 1\ 2]$$

i) Sind endlich $d_2\ d_3\ e_2\ e_3\ D_1\ D_2\ E_1\ E_2\ E_3$ beliebig angenommen und wählt man d_1 und e_1 auf den durch die Beziehungen

$$e_3\ (d_1\ d_2\ d_3\ e_2) = D_2\ (E_1\ E_2\ E_3\ D_1)$$
$$e_3\ (d_2\ d_3\ e_2\ e_1) = E_1\ (E_2\ E_3\ D_1\ D_2)$$

definierten Geraden, so findet man vermöge

$$e_i\ (d_1\ d_2\ d_3\ e_k) = D_k\ (E_1\ E_2\ E_3\ D_3) \qquad [i, k = 1, 2]$$

D_3 als Schnittpunkt zweier Strahlen.

Die behandelten Fälle f) — i) lassen sich in dem folgenden Satze zusammenfassen:

Die biquadratische Transformation ist durch die Angabe von 9 unabhängigen und 2 abhängigen Fundamentalpunkten eindeutig bestimmt.

Hiermit sind alle Möglichkeiten, die Transformation durch Angabe von Hauptpunkten allein festzulegen, erschöpft. Es würden nun diejenigen Fälle zu betrachten sein, in denen ausser Fundamentalpunkten auch geometrische Orte für dieselben gegeben sind. Die Anzahl derselben ist jedoch zu bedeutend, als dass ein Eingehen auf Einzelheiten thunlich wäre; dies ist indessen auch unnötig, da alle diese Fälle bis auf einen sogleich zu erwähnenden ihre Erledigung durch die Resultate des folgenden Paragraphen finden.

Bezeichne ich mit μ und ν die Anzahlen der vollständig bekannten und der nur auf eine Curve beschränkten Hauptpunkte, so ist $2\ \mu + \nu = 20$, $\mu + \nu \leqq 12 : \mu \geqq 8$. Soll demnach die Transformation allein durch Angabe von Hauptpunkten und von geometrischen Orten für dieselben festgelegt werden, so müssen mindestens 8 Hauptpunkte vollständig gegeben sein. Daraus schliesst man leicht, dass sich unter den Daten stets wenigstens drei Doppelpunkte oder zwei Doppelpunkte und ein Grundpunkt der einen Ebene befinden, mit alleiniger Ausnahme des folgenden Falles: Die Grundpunkte und ein Doppelpunkt jeder Ebene sind bekannt, ausserdem ist für jeden der übrigen 4 Doppelpunkte ein geometrischer Ort gegeben. Diese Daten, deren Gesamtgewicht gleich 20 ist, bestimmen die Transformation in der That. Es seien, um nur den einfachsten Fall zu behandeln, d_1 und D_1 die gegebenen Doppelpunkte, $g_2\ g_3\ G_2\ G_3$ vier Strahlen, auf denen die andern

liegen sollen.[16]) Nehme ich d_2 auf g_2 beliebig an, so sind durch die Relationen

$$e_2\ (d_1\ d_2\ e_1\ e_3) = E_3\ (E_1\ E_2\ D_3\ D_1)$$
$$e_3\ (d_1\ d_2\ e_1\ e_2) = E_3\ (E_1\ E_2\ D_2\ D_1)$$

die auf G_2 und G_3 gelegenen Punkte D_2 und D_3 bestimmt. Lasse ich d_2 die Gerade g_2 durchlaufen, so beschreiben D_2 und D_3 damit projectivische Punktreihen; der Strahl $[D_2\ D_3]$ umhüllt mithin einen Kegelschnitt. Einen zweiten Kegelschnitt erhalte ich, wenn ich g_2 und d_2 durch g_3 und d_3 ersetze. Jede der 2 beiden Kegelschnitten ausser G_2 und G_3 gemeinsamen Tangenten schneidet offenbar ein Punktepaar $D_2\ D_3$ auf $G_2\ G_3$ aus, welches auf eine den gegebenen Daten entsprechende Transformation führt. Die Bestimmung ist mithin hier eine zweideutige.

Fällt g_2 mit g_3 (oder G_2 mit G_3) zusammen, d. h. ist die Fundamentalgerade $[d_2\ d_3]$ (resp. $[D_2\ D_3]$) gegeben, so bleibt die vorige Betrachtung unverändert bestehen. Eine geringe Modification ist erforderlich, wenn sowohl g_2 mit g_3, als auch G_2 mit G_3 identisch ist; doch bleibt das Resultat auch in diesem Falle ungeändert.

§ 6.

Nächst den im vorigen Paragraphen behandelten Fällen sind diejenigen die einfachsten, in denen die Bestimmung der biquadratischen Verwandtschaft auf die Festlegung mehrerer Transformationen von niedrigerer Ordnung zurückgeführt werden kann. Diese Fälle sollen jetzt untersucht werden.

Befinden sich unter den Daten sämtliche Hauptpunkte einer Ebene oder die Doppelpunkte beider Ebenen, so reduciert sich das Bestimmbarkeitsproblem der biquadratischen Verwandtschaft durch Einführung zweier quadratischen Hilfstransformationen auf die Aufgabe, eine collineare Beziehung festzulegen, wie wohl nicht näher ausgeführt zu werden braucht. Man erkennt leicht, dass jedes von den erwähnten Hauptpunkten verschiedene Datum der Transformation 4. Ordnung eine Bestimmung von demselben Gewicht für die collineare

[16]) Treten an Stelle von $g_2\ g_3\ G_2\ G_3$ vier Curven, so lässt sich die Aufgabe mit Hilfe des verallgemeinerten Correspondenzprincips lösen,

Verwandtschaft liefert. Da zur Festlegung dieser letzteren 8 einfache Data erforderlich sind, während die Angabe der 6 Hauptpunkte deren 12 einschliesst, so ergiebt sich auch hier das Gesamtgewicht 20 für die zur Bestimmung der biquadratischen Transformation dienenden Daten.

(A) Die Verwandtschaft 4. Ordnung lässt sich in zwei quadratische zerlegen, wenn die Doppelpunkte der einen Ebene, etwa $d_1\ d_2\ d_3$, bekannt sind. Ich stelle diese Zerlegung, die ich bereits früher betrachtet habe (§ 1), unter Beibehaltung der damaligen Bezeichnung durch das folgende, danach leicht verständliche Schema dar:

	I.	Tr. 4. O.	II.	
	$[d_1\ d_2\ d_3]\ (e_1\ e_2\ e_3)\ a..x$		$(E_1\ E_2\ E_3)\ [D_1\ D_2\ D_3]\ A..X$	
Tr. 2. O.	$(d_1\ d_2\ d_3)\ e_1\ e_2\ e_3\ a..x$		$E_1\ E_2\ E_3\ (D_1\ D_2\ D_3)\ A..X$	Tr. 2. O.
	$(\delta_1\ \delta_2\ \delta_3)\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \alpha..\xi$	III.	$\delta_1\ \delta_2\ \delta_3\ (\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)\ \alpha.\ \xi$	

Die Doppelpunkte und Grundpunkte jeder Transformation sind durch Einschliessen in eckige, resp. runde Klammern gekennzeichnet; ihre Correspondenz, sowie die Zuordnung der entsprechenden Punkte ist durch gleichartige Stellung angedeutet.

Die quadratische Beziehung (I III) ist durch die Hauptpunkte $d_1\ d_2\ d_3$ und irgend 4 andere Bestimmungen festgelegt, die Beziehung (II III) dagegen durch Daten, welche sich aus den für die biquadratische Transformation gemachten Angaben ergeben. Man erkennt leicht, dass jede der letzteren, mit Ausnahme von $d_1\ d_2\ d_3$, ein ebenso vielfach zählendes Datum der Verwandtschaft (II III) liefert. Die Kenntnis des Grundpunktes e_i gestattet die Bestimmung von ε_i, d. h. eines Hauptpunktes der Transformation (II III). Ein ebensolcher ist durch die Angabe von D_i unmittelbar bekannt. Das Datum eines Grundpunktes E_i führt dagegen auf ein entsprechendes Punktepaar $E_i\ \delta_i$. Sein Gewicht wird dadurch nicht geändert, und dasselbe gilt in Bezug auf alle übrigen Data. Da nun deren 14 zur Festlegung der quadratischen Verwandtschaft (II III) erforderlich sind, und 6 weitere in der Angabe von $d_1\ d_2\ d_3$ enthalten sind, so zeigt sich die biquadratische Transformation, wie es sein muss, durch 20 einfache Daten bestimmt. (Das-

selbe Resultat gilt auch in den folgenden Fällen, wo ich es nicht mehr ausführlich hervorheben will.)

Wenn in keiner Ebene sämtliche Doppelpunkte bekannt (B) sind, so ist der einfachste Fall der, dass man in wenigstens einer Ebene zwei derselben und einen Grundpunkt, z. B. d_1 d_2 e_3, kennt. Verlegt man in diese die Hauptpunkte einer quadratischen Verwandtschaft, so besteht zwischen der neu eingeführten Hilfsebene und der zweiten Ebene eine Transformation 3. Ordnung. Ich stelle also zwischen der Hilfsebene III und der Ebene I eine quadratische Beziehung her, deren Hauptpunkte in III drei willkürlich angenommene Punkte δ_1 δ_2 ε_3, in I d_1 d_2 e_3 sind. Mit Benutzung der bekannten Sätze über die durch eine quadratische oder biquadratische Transformation bewirkten Aenderungen beliebiger Curven (vgl. S. 20) findet man ohne Schwierigkeit, dass jeder in II gelegenen Geraden in III eine durch δ_3 doppelt, durch δ_1 δ_2 ε_1 ε_2 einfach hindurchgehende Curve 3. Ordnung entspricht, während umgekehrt eine Gerade der Ebene III in eine durch E_1 E_2 D_1 D_2 einfach, durch D_3 doppelt gehende Curve 3. Ordnung der Ebene II übergeht. Die Transformation (II III) ist demnach in der That eine kubische, die genannten Punkte sind ihre Hauptpunkte, deren Correspondenz ebenfalls leicht festzustellen ist. Man findet z. B., dass dem Punkte E_1 der Strahl δ_2 δ_3 entspricht, d. h. dass E_1 δ_2 ein correspondierendes Paar bilden. Ich führe diese Betrachtungen nicht im einzelnen durch, sondern stelle sofort das Resultat in der folgenden Uebersicht zusammen:

$$
\begin{array}{lcl}
\text{I.} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\text{Tr. 4. O.}} & \text{II.} \\
[d_1\ d_2\ d_3]\ (e_1\ e_2\ e_3)\ a\,..\,x & & (E_1\ E_2\ E_3)\ [D_1\ D_2\ D_3]\ A\,..\,X \\
\text{Tr. 2. O.}\left\{\begin{array}{l}(d_1\ d_2\ e_3)\ e_1\ e_2\ d_3\ a\,..\,x \\ (\delta_1\ \delta_2\ \varepsilon_3)\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \delta_3\ \alpha\,..\,\xi\end{array}\right. & \text{III.} & \left.\begin{array}{l}(E_1\ E_2\ D_1\ D_2)\ [D_3]\ E_3\ A\,..\,X \\ (\delta_2\ \delta_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_1)\ [\delta_3]\ \varepsilon_3\ \alpha\,..\,\xi\end{array}\right\}\text{Tr. 3. O.}
\end{array}
$$

Man überzeugt sich mit Hilfe dieser Tabelle leicht, dass jedes Datum der biquadratischen Transformation (I II) eine gleichwertige Bestimmung der kubischen Verwandtschaft (II III) liefert, mit alleiniger Ausnahme von ε_3. Dies steht damit im Einklang, dass die Festlegung der ersteren 2 einfache Daten mehr (20) erfordert, als die letztere (18).

(C) Auf diesen Fall lässt sich der folgende zurückführen: Es sind zwei Doppelpunkte in jeder Ebene, etwa $d_1\ d_2$, $D_1\ D_2$, ausser diesen jedoch keine weiteren Fundamentalpunkte bekannt. Ausserdem muss sich allerdings unter den übrigen Daten wenigstens ein entsprechendes Punktepaar a, A befinden. Ich transformiere die Ebene I quadratisch in eine Hilfsebene III, indem ich $d_1\ d_2$ a als Hauptsystem in I benutze. Die Beziehungen der Ebenen I, II, III stellen sich alsdann folgendermassen dar:

	I.		Tr. 4. O.	II.	
	$[d_1\ d_2\ d_3]\ (e_1 e_2 e_3)\ a\ .\ .\ x$		$(E_1 E_2 E_3)\ [D_1 D_2 D_3] A\ .\ .X$		
Tr. 2. O.	$(d_1\ d_2\ a)\ e_1\ e_2\ e_3\ d_3\ .\ .x$		$(E_1\ E_2\ A)\ [D_1 D_2 D_3] E_3\ .\ .X$		Tr. 4. O.
	$(\delta_1\ \delta_2\ \alpha)\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \delta_3\ .\ .\xi$	III.	$[\delta_1\ \delta_2\ \delta_3]\ (\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)\alpha\ .\ .\ \xi$		

Es ist ersichtlich, das jedes Datum der Transformation (I II) in ein solches von gleichem Gewicht für die Bestimmung von (II III) übergeht. Letztere ist allerdings auch von der 4. Ordnung; auf sie kann jedoch das Verfahren des Falles B angewendet werden, da 2 Doppelpunkte $D_1\ D_2$ und 1 Grundpunkt A ihres einen Hauptsystems bekannt sind.

Die hier benutzte Umformung setzt an sich die Kenntnis der Doppelpunkte $D_1\ D_2$ nicht voraus. Man kann sie daher allgemein dahin interpretieren, dass die beiden Transformationen (I II) und (II III) in einer gegenseitig eindeutigen Beziehung stehen. Die zu ihrer Bestimmung dienenden Daten unterscheiden sich nur dadurch, dass an Stelle des bei der ersteren auftretenden entsprechenden Punktepaares a A bei der zweiten der Grundpunkt A bekannt ist, welcher den bekannten Doppelpunkten nicht correspondiert. (Etwaige unter den Daten enthaltene geometrische Orte können allerdings ihrer Form nach geändert sein, doch hat dies offenbar höchstens auf die Vieldeutigkeit der Bestimmung einen Einfluss. Hierauf bezieht sich der Zusatz „im allgemeinen“ in dem folgenden Satze.) Man kann infolge dessen den Satz aussprechen:

Wenn sich unter den Bestimmungsstücken einer biquadratischen Transformation zwei Doppelpunkte einer Ebene befinden, so kann an Stelle eines gegebenen Punktepaares der jenen beiden nicht correspondierende Grundpunkt der andern Ebene treten, sowie auch das Umgekehrte statthaft ist; die Ein- oder Mehr-

deutigkeit, desgleichen irgend welche etwa bestehende Abhängigkeitsverhältnisse der andern Daten bleiben dabei (im allgemeinen) ungeändert.

Es giebt noch einen Fall, in welchem eine biquadratische Transformation durch Zusammensetzung mit einer quadratischen wieder in eine solche der 4. Ordnung übergeht. Verlegt man nämlich in zwei Grundpunkte e_1 e_2 und einen Doppelpunkt d_3 das Hauptsystem einer quadratischen Verwandtschaft, durch welche die Ebene I in eine andere, III, übergeführt wird, so entsteht die durch folgende Uebersicht dargestellte Beziehung zwischen I, II, III: (D)

I.	Tr. 4. 0.	II.	
$[d_1\ d_2\ d_3]\ (e_1\ e_2\ e_3)\ a..x$		$(E_1\ E_2\ E_3)\ [D_1\ D_2\ D_3]\ A..X$	
$(e_1\ e_2\ d_3)\ d_1\ d_2\ e_3\ a..x$		$(E_1\ E_2\ D_3)\ [D_1\ D_2\ E_3]\ A..X$	Tr. 4. 0.
$(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \delta_3)\ \delta_1\ \delta_2\ \varepsilon_3\ \alpha..\xi$	III.	$[\delta_1\ \delta_2\ \delta_3]\ (\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)\ \alpha..\xi$	Tr. 4. 0.
Tr. 0. 2. r			

Ein Blick hierauf lehrt, dass bis auf zwei Ausnahmen aus jedem Datum der Transformation (I II) ein ebensolches für die Beziehung (II III) hervorgeht. Die erwähnten Ausnahmen werden von D_3 und E_3 gebildet, indem D_3 für die eine Transformation ein Doppelpunkt, für die andere ein Grundpunkt ist, während von E_3 das Umgekehrte gilt. Daraus ergiebt sich ein ähnlicher Satz wie im vorigen Falle:

Befinden sich unter den Bestimmungsstücken einer biquadratischen Transformation ein Doppelpunkt und zwei Grundpunkte einer Ebene, so sind der dem ersten correspondierende Grundpunkt und der den beiden letzten nicht correspondierende Doppelpunkt gleichwertige Daten, d. h. der eine kann an Stelle des andern treten, ohne dass in der Ein- oder Mehrdeutigkeit der Bestimmung oder in den etwaigen, den andern Daten aufzuerlegenden Bedingungen (im allgemeinen) eine Aenderung eintritt.

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich das Bestimmungsproblem der biquadratischen Transformation in allen Fällen erledigen, wo in jeder Ebene zwei Grundpunkte und zu je einem derselben der correspondierende Doppelpunkt gegeben sind. Kennt man nämlich z. B. $d_3\ e_1\ e_2\ D_1\ E_2\ E_3$, so ist dies nach dem vorigen Satze gleichbedeutend mit der Kenntnis von $d_3\ e_1\ e_2\ D_1\ E_2\ D_3$, welche (nach B) die Reduction auf eine Transformation 3. Ordnung gestattet.

Fasse ich die Untersuchungen dieses Paragraphen kurz zusammen, so zeigt sich, dass alle Fälle auf die Festlegung von Transformationen niedrigerer (2. oder 3.) Ordnung zurückführbar sind, bei denen sich unter den Bestimmungsstücken einer biquadratischen Verwandtschaft folgende Fundamentalpunkte befinden:

A) Alle Doppelpunkte einer Ebene.
B) Zwei Doppelpunkte und ein Grundpunkt einer Ebene.
C) Je zwei Doppelpunkte beider Ebenen.
D) Ein Doppelpunkt und zwei Grundpunkte jeder Ebene, unter denen sich zwei correspondierende Paare befinden.

Ich breche meine Arbeit an diesem Punkte ab, indem ich diejenigen Fälle, welche eine Zurückführung auf Transformationen niedrigerer Ordnung nicht gestatten, unerörtert lasse. Bei der grossen Zahl und ausserordentlichen Mannigfaltigkeit derselben ist weder eine ausführliche Einzeluntersuchung möglich, noch lassen sich umfassende, allgemeine Sätze aufstellen. Man wird sich deshalb darauf beschränken müssen, einige der wichtigsten und zugleich einfachsten Fälle (z. B. die Festlegung der Transformation durch alleinige Angabe entsprechender Punktepaare) zu betrachten. Die Untersuchung derselben ist indessen mit nicht unbedeutenden Schwierigkeiten verknüpft und erfordert so umständliche Erörterungen, dass sie einer besonderen Arbeit vorbehalten bleiben muss.

Lebenslauf.

Ich, Adolf Friedrich Carl Schmidt, evangelischer Confession, wurde am 23. Juli 1860 als Sohn des Maschinenbaumeisters Friedrich Schmidt in Breslau geboren. Meine Mutter Mathilde Schmidt, geb. Eckstein, verlor ich leider schon in früher Jugend durch den Tod. Nach kurzem Besuch einer Elementarschule absolvierte ich die hiesige evangelische höhere Bürgerschule I und darauf die Realschule zum heiligen Geist. Nach bestandenem Abiturientenexamen bezog ich Ostern 1878 die hiesige Universität und hörte 8 Semester hindurch Vorlesungen der Herren Professoren: Auerbach, Dilthey, Dorn, Galle, Kölbing, Krause, v. Lasaulx, Meyer, Neumann, Oginsky, Partsch, v. Richter, Rosanes, Schottky, Schröter, Weber.

An den Uebungen des mathematisch-physikalischen Seminars nahm ich 6 Semester, an denen des englischen und des philosophischen Seminars je ein Semester teil; ausserdem arbeitete ich 2 Semester im physikalischen Institut.

Allen den Genannten, insbesondere den Herren Professoren Dorn, Meyer, Rosanes, Schröter spreche ich hiermit meinen herzlichen Dank aus.

Thesen.

1. Die Benutzung der Quaternionen ist für die reine wie für die angewandte Mathematik ohne wesentlichen Vorteil; ihre Einführung rechtfertigt sich allein durch das Interesse, welches ihre Theorie an sich darbietet.
2. Die Amplitude der Aetherschwingungen ist ohne jeden merklichen Einfluss auf die bekannten optischen Erscheinungen.
3. Der Unterricht im Linearzeichnen würde, ohne selbst irgend welche Schädigung zu erleiden, in hohem Grade zur Förderung und Befestigung der mathematischen Ausbildung beitragen, wenn er sich in erster Linie auf Projections- und perspectivisches Zeichnen erstreckte.
4. Der Fortschritt der Psychologie hängt davon ab, ob und inwieweit dieselbe imstande ist, experimentelle Untersuchungen und quantitative Bestimmungen anzuwenden.
5. Geographische und historische Eigennamen, für welche eine allgemein gebräuchliche deutsche Form nicht unzweifelhaft feststeht, sind in Betreff der Aussprache und, wenn dies möglich ist, der Schreibweise stets in der Originalform anzuwenden.